

## H5. Ruimtmeetkunde.

### 5.1 Punten, lijnen en vlakken.

#### Opgave 1:

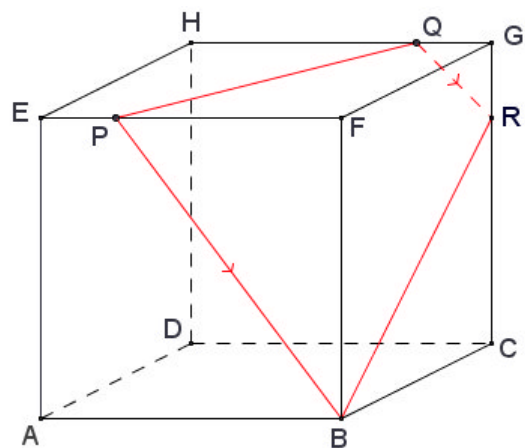
- de punten  $A, B, E$  en  $F$  liggen in één vlak en de lijnen  $AE$  en  $BF$  zijn niet evenwijdig, dus snijden ze elkaar.
- nee, punt  $C$  ligt niet in vlak  $AEF$ , dus  $AE$  en  $CF$  kruisen elkaar.

#### Opgave 2:

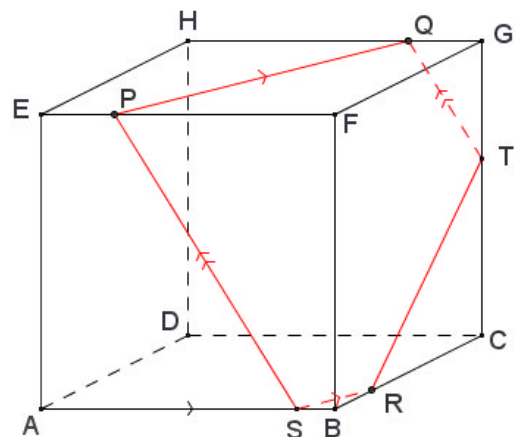
- $D, S, Q$
- $G, E, R$
- $M, P$
- $B, M$

#### Opgave 3:

- Teken  $BP$  en  $PQ$ .  
Teken door punt  $Q$  een lijn evenwijdig met  $BP$ ; dat levert punt  $R$ .  
Teken  $BR$ .

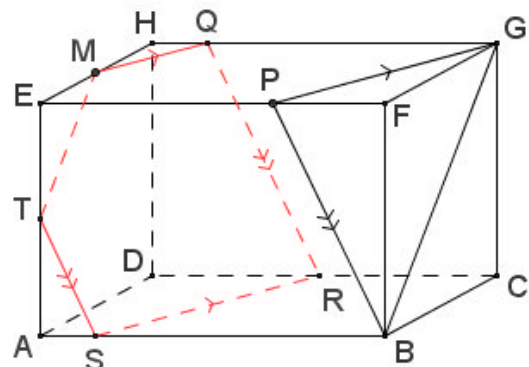


- Teken  $PQ$ .  
Teken door punt  $R$  de lijn evenwijdig met  $PQ$ ; dat levert punt  $S$ .  
Teken  $PS$ .  
Teken door punt  $Q$  de lijn evenwijdig met  $PS$ ; dat levert punt  $T$ .  
Teken  $RT$ .



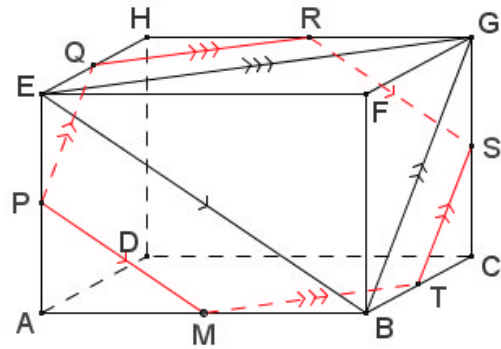
#### Opgave 4:

- Teken door punt  $M$  de lijn evenwijdig met  $PG$ ; dat levert punt  $Q$ .  
Teken door punt  $Q$  de lijn evenwijdig met  $BP$ ; dat levert punt  $R$ .  
Teken door punt  $R$  de lijn evenwijdig met  $PG$ ; dat levert punt  $S$ .  
Teken door punt  $S$  de lijn evenwijdig met  $BP$ ; dat levert punt  $T$ .  
Teken  $MT$ .



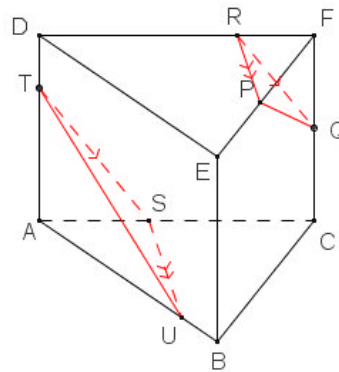
**Opgave 5:**

Teken door punt  $M$  de lijn evenwijdig met  $BE$  ;  
dat levert punt  $P$ .  
Teken door punt  $P$  de lijn evenwijdig met  $BG$  ;  
dat levert punt  $Q$ .  
Teken door punt  $Q$  de lijn evenwijdig met  $EG$  ;  
dat levert punt  $R$ .  
Teken door punt  $R$  de lijn evenwijdig met  $BE$  ;  
dat levert punt  $S$ .  
Teken door punt  $S$  de lijn evenwijdig met  $BG$  ;  
dat levert punt  $T$ .  
Teken  $MT$ .



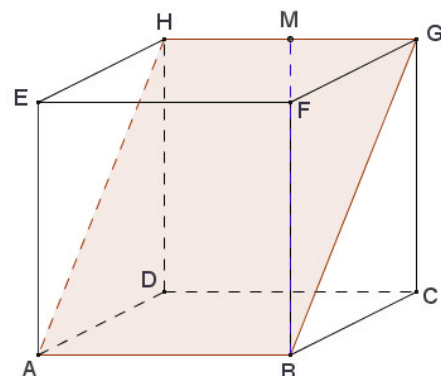
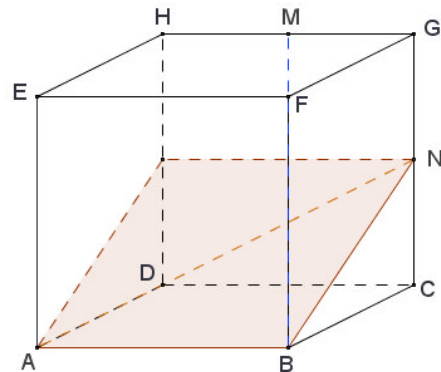
**Opgave 6:**

Teken in het achtervlak door punt  $T$  een lijn  
evenwijdig met  $QR$ . Dat levert punt  $S$ .  
Teken in het grondvlak door punt  $S$  een lijn  
evenwijdig met  $PR$ . Dat levert punt  $U$ .  
Verbind in het linker voorvlak de punten  $T$  en  $U$ .

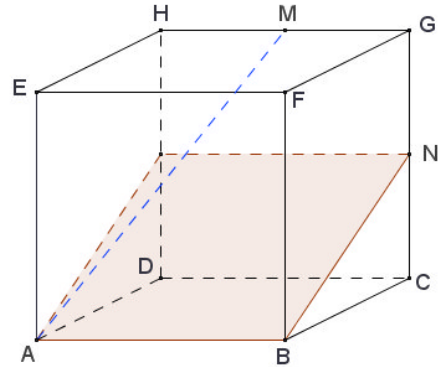


**Opgave 7:**

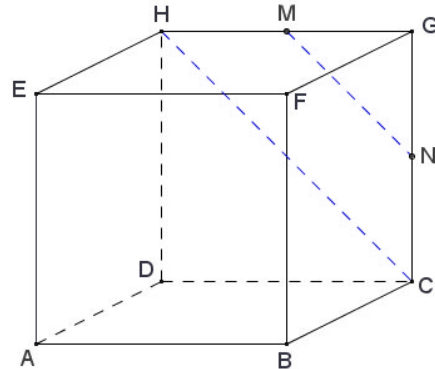
- punt  $M$  ligt niet in vlak  $ABN$   
dus  $AN$  en  $BM$  kruisen elkaar
- punt  $M$  ligt in vlak  $ABH$  en  $AH$  en  $BM$   
zijn niet evenwijdig, dus snijden ze elkaar



- c. punt  $M$  ligt niet in vlak  $ABN$   
 dus  $AH$  en  $BM$  kruisen elkaar

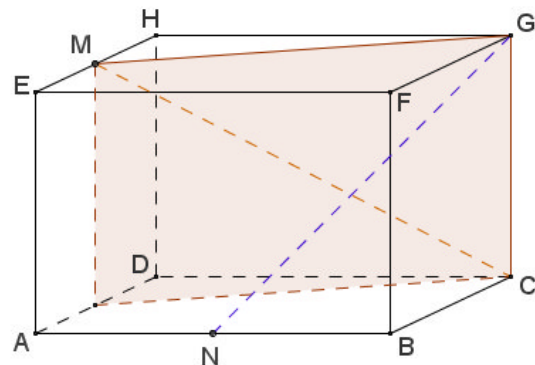


- d. punt  $M$  ligt in vlak  $CHN$  en  
 $MN$  en  $CH$  zijn evenwijdig

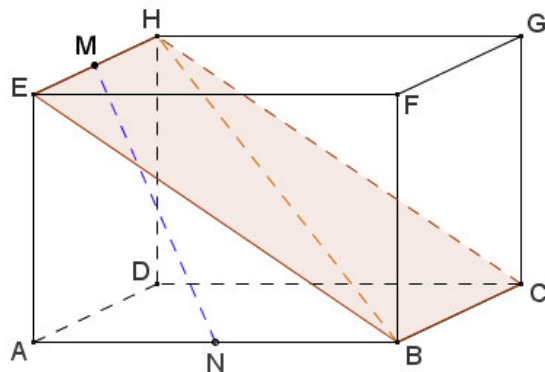


**Opgave 8:**

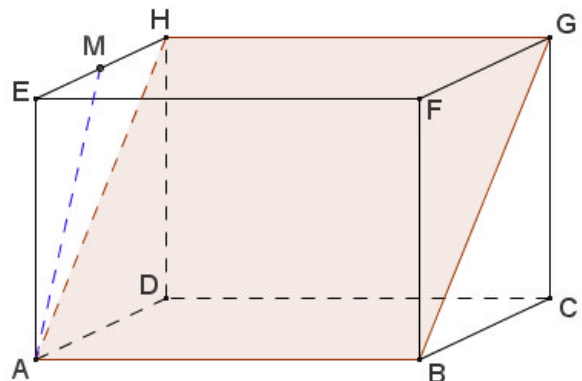
- a. punt  $N$  ligt niet in vlak  $CGM$   
 dus  $CM$  en  $NG$  kruisen elkaar



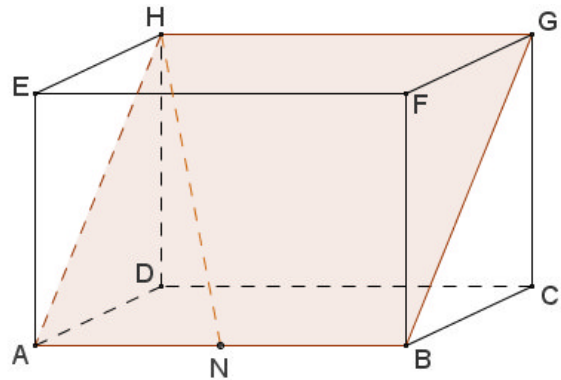
- b. punt  $N$  ligt niet in vlak  $BHM$   
 dus  $BH$  en  $MN$  kruisen elkaar



- c. punt  $M$  ligt niet in vlak  $ABG$   
 dus  $AM$  en  $BG$  kruisen elkaar



- d. de punten  $B, G, H$  en  $N$  liggen in één vlak en  $BG$  en  $HN$  zijn niet evenwijdig, dus snijden ze elkaar

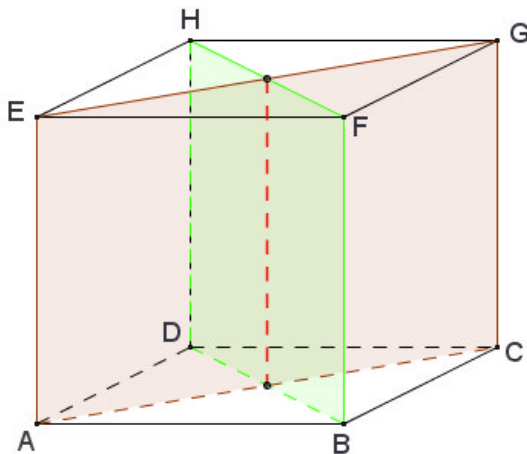


**Opgave 9:**

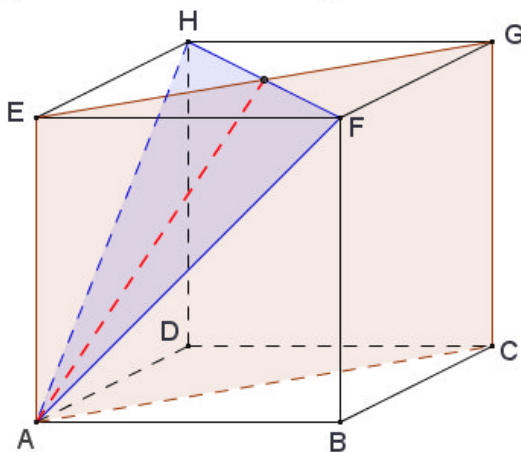
- de punten  $A, B, E$  en  $F$  liggen in één vlak en  $AE$  en  $BF$  zijn niet evenwijdig, dus snijden ze elkaar
- de punten  $M, N, H$  en  $K$  liggen in één vlak en  $MN$  en  $KH$  zijn niet evenwijdig, dus snijden ze elkaar
- punt  $G$  ligt niet in vlak  $CFK$ , dus  $KG$  en  $CF$  kruisen elkaar

**Opgave 10:**

a.

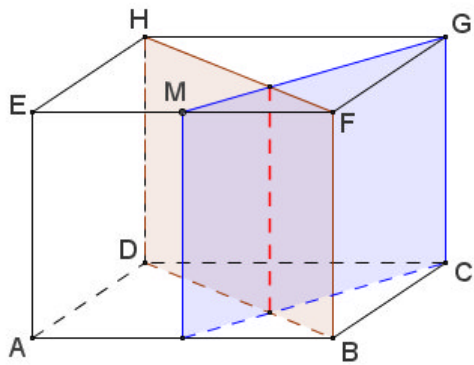


b.

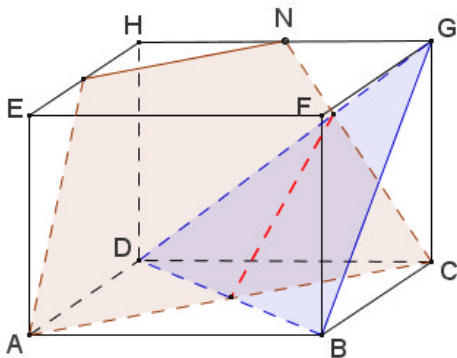


**Opgave 11:**

a.

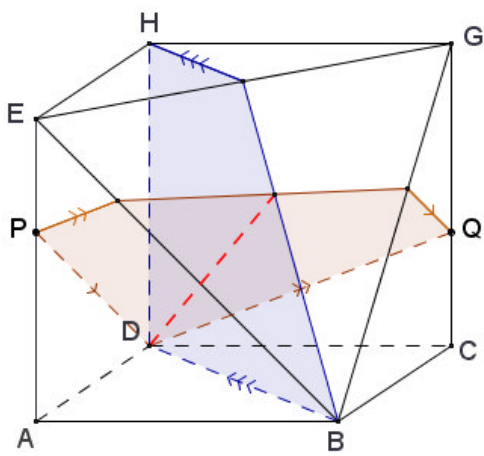


b.

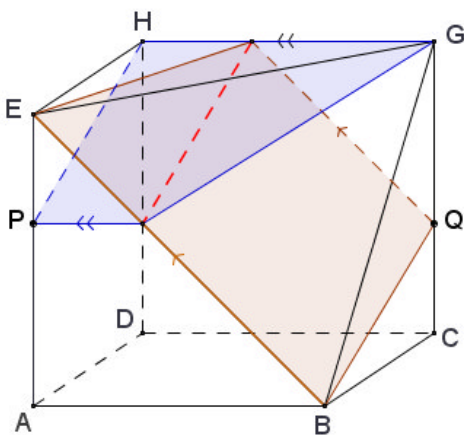


**Opgave 12:**

a.

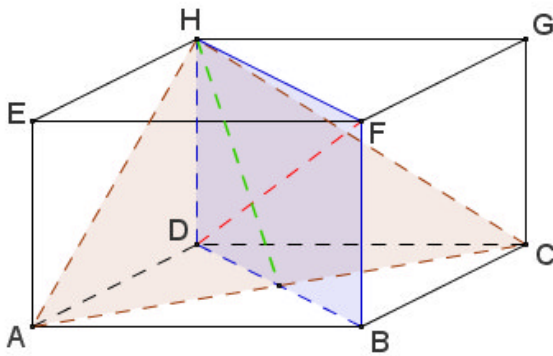


b.



**Opgave 13:**

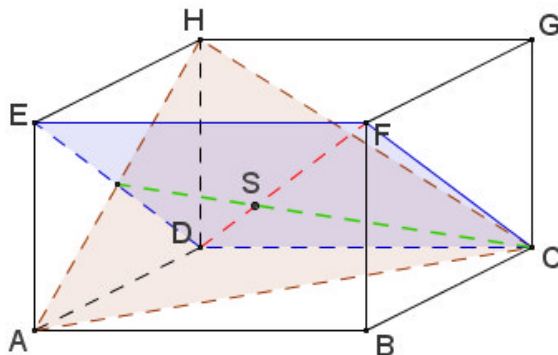
a.



b. Lijn  $k$  ligt in vlak  $BDHF$  en in dat vlak ligt ook  $DF$ , dus snijden  $DF$  en lijn  $k$  elkaar (want ze zijn niet evenwijdig).

c. Lijn  $k$  ligt ook in het vlak  $ACH$ , dus punt  $S$  ligt in vlak  $ACH$  en op  $DF$ .

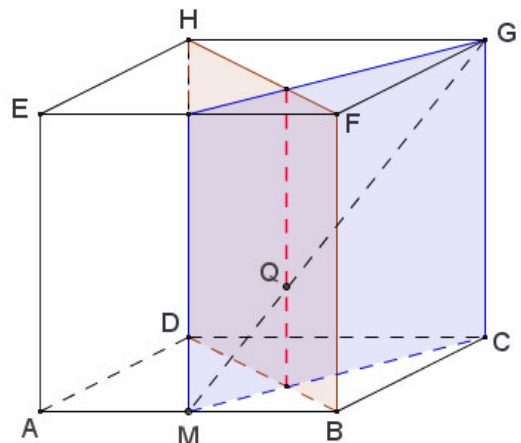
d.



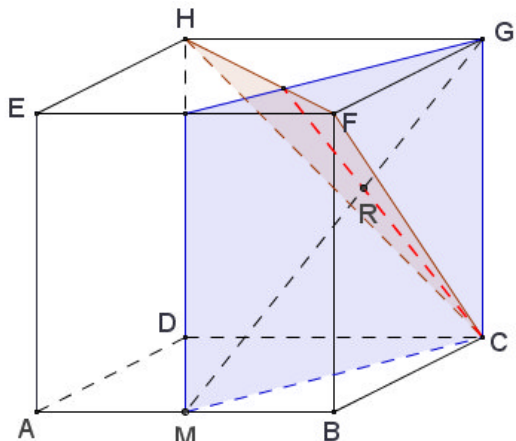
e. Punt  $S$  is het snijpunt van lijn  $l$  en  $DF$ .

**Opgave 14:**

a. Teken het verticale hulpvlak  $CGM$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $DBF$  en  $CGM$ .  
Het snijpunt van  $GM$  met de snijlijn is het gevraagde punt  $Q$ .

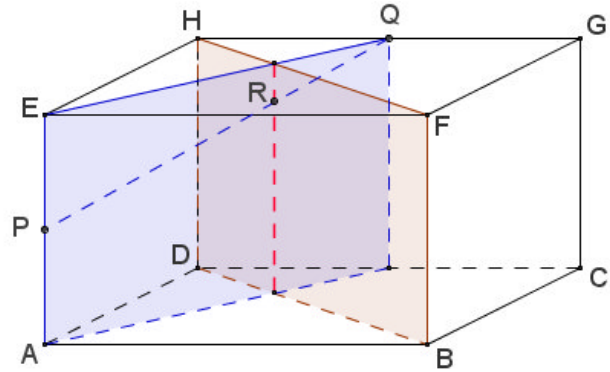


b. Teken het verticale hulpvlak  $CGM$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $CHF$  en  $CGM$ .  
Het snijpunt van  $GM$  met de snijlijn is het gevraagde punt  $R$ .

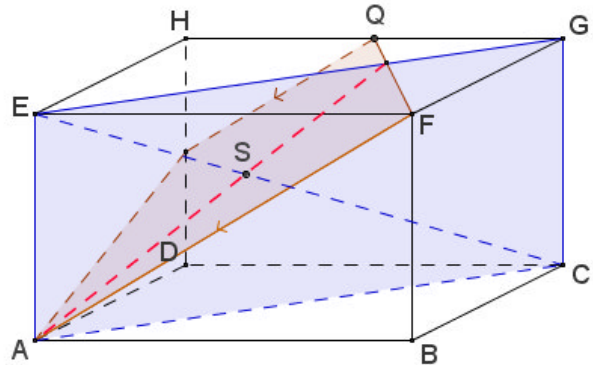


**Opgave 15:**

- a. Teken het hulpvlak  $AEQ$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $AEQ$  en  $DBF$ .  
Punt  $R$  is het snijpunt van deze snijlijn met lijn  $PQ$ .

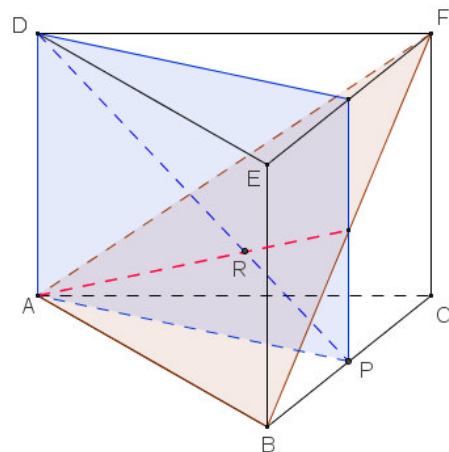


- b. Teken het hulpvlak  $CGEA$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $CGEA$  en  $AFQ$ .  
Punt  $S$  is het snijpunt van deze snijlijn met lijn  $CE$ .

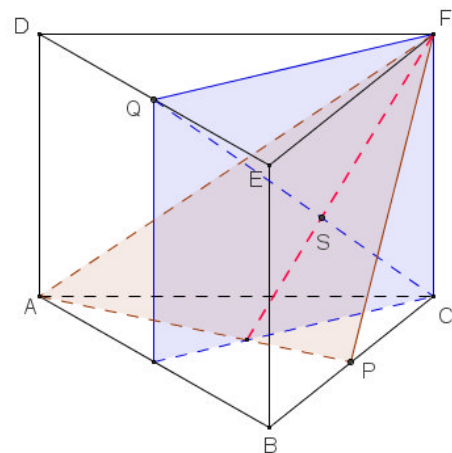


**Opgave 16:**

- a. Teken het hulpvlak  $DAP$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $DAP$  en  $ABF$ .  
Punt  $R$  is het snijpunt van deze snijlijn met lijn  $DP$ .

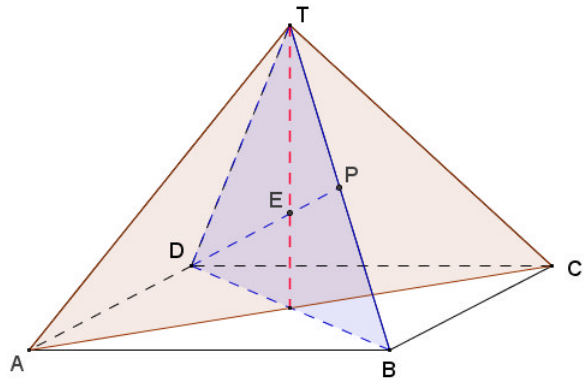


- b. Teken het hulpvlak  $CFQ$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $CFQ$  en  $APF$ .  
Punt  $S$  is het snijpunt van deze snijlijn met lijn  $CQ$ .

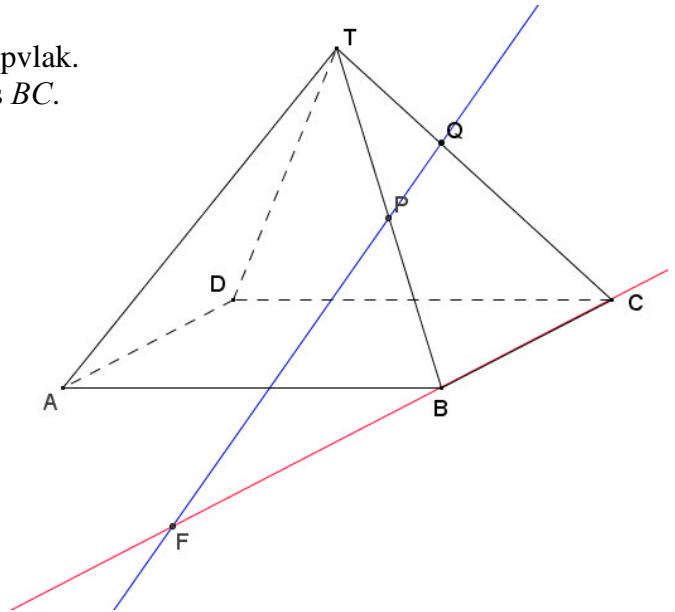


**Opgave 17:**

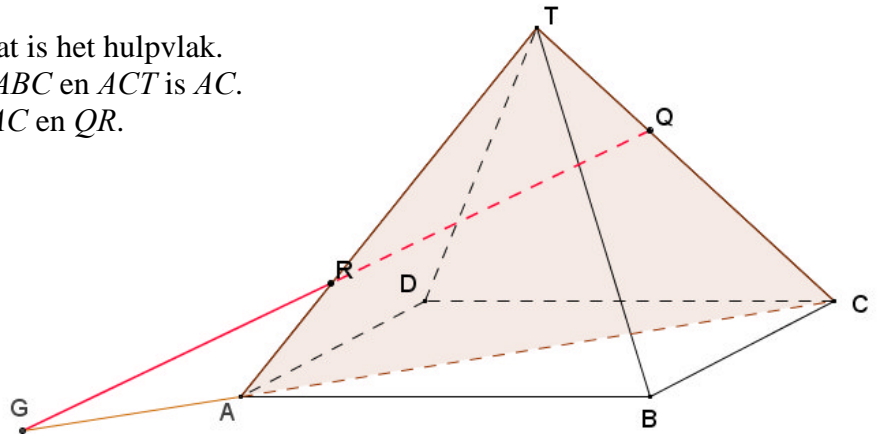
- a. Teken het hulpvlak  $BDT$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $BDT$  en  $ACT$ .  
Punt  $E$  is het snijpunt van deze snijlijn met  $DP$ .



- b.  $PQ$  ligt in het vlak  $BCT$ , dus dat is het hulpvlak.  
De snijlijn van de vlakken  $ABC$  en  $BCT$  is  $BC$ .  
Punt  $F$  is het snijpunt van  $PQ$  en  $BC$ .



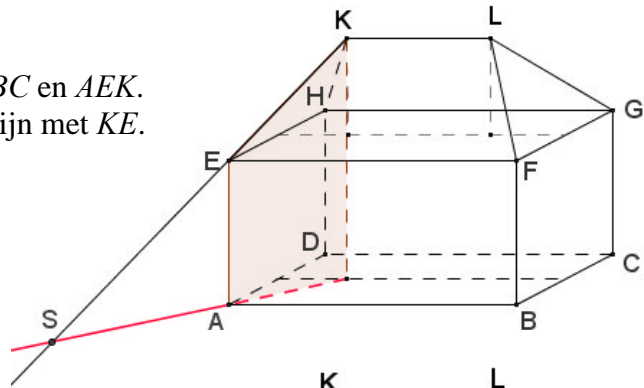
- c.  $QR$  ligt in vlak  $ACT$ , dus dat is het hulpvlak.  
De snijlijn van de vlakken  $ABC$  en  $ACT$  is  $AC$ .  
Punt  $G$  is het snijpunt van  $AC$  en  $QR$ .



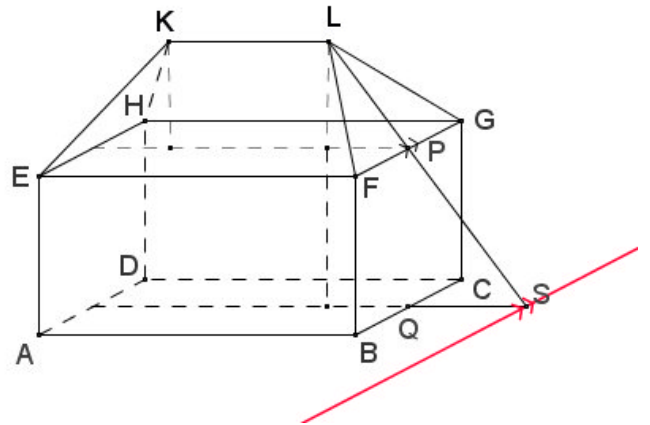


**Opgave 18:**

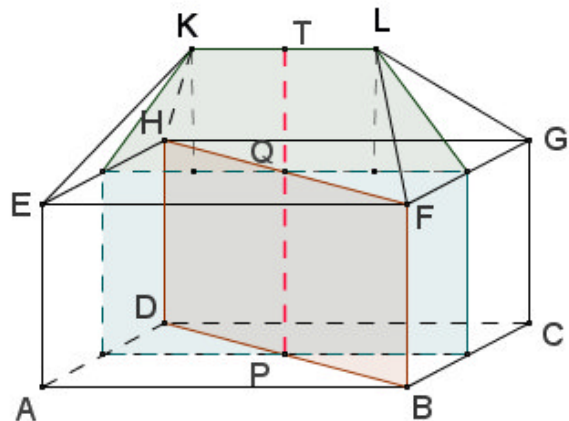
- a. Teken het verticale hulpvlak  $AEK$ .  
Teken de snijlijn van de vlakken  $ABC$  en  $AEK$ .  
Punt  $S$  is het snijpunt van deze snijlijn met  $KE$ .



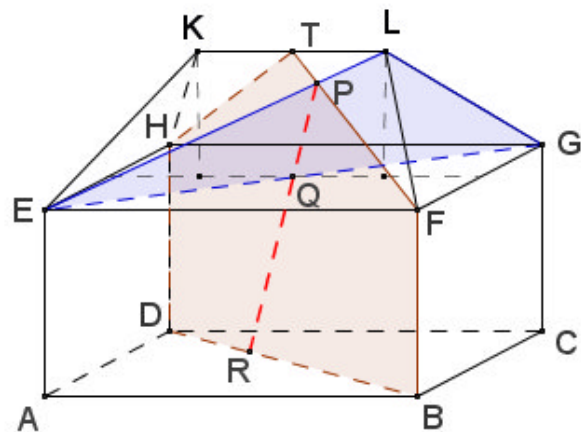
- b. Punt  $P$  is het midden van  $FG$ .  
Punt  $Q$  is het midden van  $BC$ .  
Teken het verticale hulpvlak  $LPQ$ .  
 $LP$  snijdt het grondvlak  $ABCD$  in punt  $S$ .  
Teken door punt  $S$  een lijn evenwijdig met  $FG$ .



- c. Teken het verticale hulpvlak door  $KL$ .  
 $PQ$  is de snijlijn van dit hulpvlak met het vlak  $BDHF$ .  
Punt  $T$  is het snijpunt van  $PQ$  en  $KL$ .



- d. Teken het verticale vlak  $BDHTF$ .  
 $TF$  snijdt  $EL$  in punt  $P$ .  
 $EG$  snijdt  $FH$  in punt  $Q$ .  
Lijn  $PQ$  is de snijlijn van de vlakken  $BDH$  en  $EGL$ .



**Opgave 19:**

|      | lijn                               | vlak                   |
|------|------------------------------------|------------------------|
| lijn | evenwijdig<br>snijgend<br>kruisend | evenwijdig<br>snijgend |
| vlak |                                    | evenwijdig<br>snijgend |

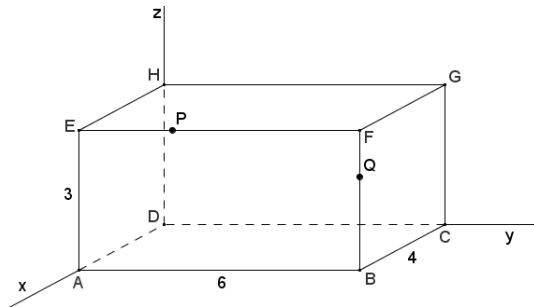
## 5.2 Coördinaten in de ruimte

### Opgave 20:

- $M(4, 4\frac{1}{2}, 3)$
- $N(2, 5, 3)$
- $B(4, 5, 0)$
- $G(0, 5, 3)$
- $E(4, 0, 3)$
- $C(0, 5, 0)$

### Opgave 21:

a.



- $B(4, 6, 0)$      $E(4, 0, 3)$      $F(4, 6, 3)$      $G(0, 6, 3)$
- zie opgave a
- $M = (\frac{4+4}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{3+2}{2}) = (4, 4, 2\frac{1}{2})$

### Opgave 22:

- $C(0, 6, 0)$      $F(6, 6, 6)$   
 $M = (\frac{0+6}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{0+6}{2}) = (3, 6, 3)$
- $C(0, 6, 0)$      $Q(6, 0, 3)$   
 $R = (\frac{0+6}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{0+3}{2}) = (3, 3, 1\frac{1}{2})$
- punt  $S$  ligt op de  $x$ -as, dus  $y_S = 0$  en  $z_S = 0$   
 $D(0, 0, 6) \xrightarrow{+(6, 0, -3)} Q(6, 0, 3) \xrightarrow{+(6, 0, -3)} S(12, 0, 0)$
- voor ieder punt op de lijn  $BF$  geldt dat  $x = 6$  en  $y = 6$   
 $Q(6, 0, 3) \xrightarrow{+(0, 3, 3)} P(6, 3, 6) \xrightarrow{+(0, 3, 3)} T(6, 6, 9)$

### Opgave 23:

- $B(6, 6, 0)$      $T(3, 3, 8)$   
 $M = (\frac{6+3}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{0+8}{2}) = (4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 4)$
- $C(0, 6, 0)$      $M(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 4)$   
 $P = (\frac{0+4\frac{1}{2}}{2}, \frac{6+4\frac{1}{2}}{2}, \frac{0+4}{2}) = (2\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4}, 2)$
- $M(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 4)$      $S(3, 3, 0)$   
 $Q = (\frac{4\frac{1}{2}+3}{2}, \frac{4\frac{1}{2}+3}{2}, \frac{4+0}{2}) = (3\frac{3}{4}, 3\frac{3}{4}, 2)$

**Opgave 24:**

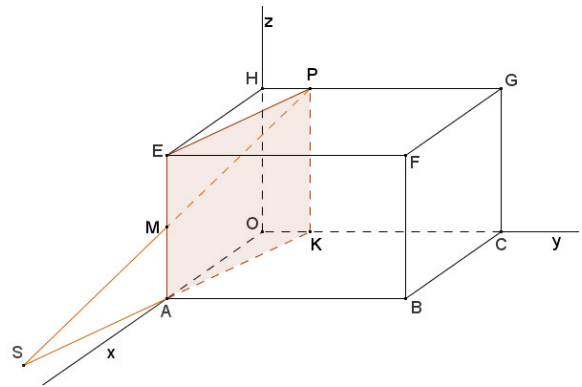
- a.  $H(-6,6,0)$      $K(-6,0,6)$      $P(-6,0,12)$
- b.  $A(6,0,0)$      $N(-6,6,12)$   
 $midden = (\frac{6+(-6)}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+12}{2}) = (0,3,6)$
- c.  $C(0,6,0)$      $P(-6,0,12)$   
 $midden = (\frac{0+(-6)}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{0+12}{2}) = (-3,3,6)$
- d. punt  $J$
- e. punt  $Q$  ligt op de  $y$ -as, dus  $x_Q = 0$  en  $z_Q = 0$   
 $M(0,6,12) \xrightarrow{+(0,-6,-6)} D(0,0,6) \xrightarrow{+(0,-6,-6)} Q(0,-6,0)$

**Opgave 25:**

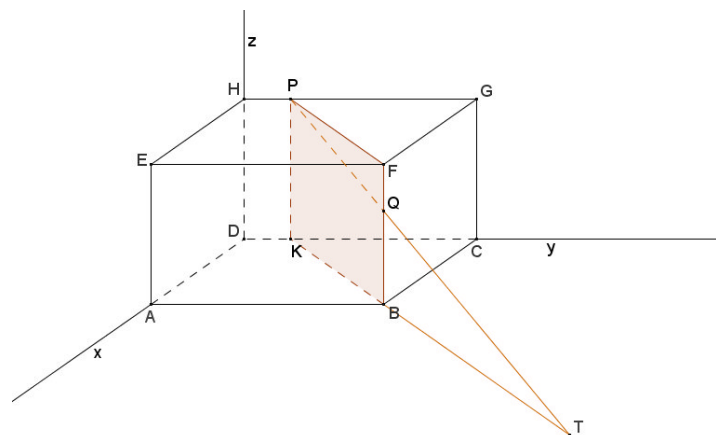
- a.  $A(3,3,0)$      $B(-3,3,0)$      $C(-3,-3,0)$      $D(3,-3,0)$      $E(3,3,6)$      $F(-3,3,6)$      $G(-3,-3,6)$   
 $H(3,-3,6)$      $T(0,0,10)$
- b. punt  $P$  ligt in het  $Oxy$ -vlak, dus  $z_P = 0$   
 $T(0,0,10) \xrightarrow{+(3,-3,-4)} H(3,-3,6) \xrightarrow{+\frac{1}{2} \cdot (3,-3,-4)} P(7\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2}, 0)$
- c. als je punt  $P$  spiegelt in de  $x$ -as krijg je punt  $Q$ , dus  $Q = (7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 0)$

**Opgave 26:**

- a. teken het verticale hulpvlak  $AEPK$   
punt  $S$  is het snijpunt van  $PM$  en  $AK$   
punt  $S$  ligt in het grondvlak dus  $z_S = 0$   
 $P(0,1,3) \xrightarrow{+(4,-1,-1\frac{1}{2})} M(4,0,1\frac{1}{2})$   
 $M(4,0,1\frac{1}{2}) \xrightarrow{+(4,-1,-1\frac{1}{2})} S(8,-1,0)$



- b. teken het verticale hulpvlak  $BFPK$   
punt  $T$  is het snijpunt van  $PQ$  en  $KB$   
punt  $T$  ligt in het grondvlak dus  $z_T = 0$   
 $P(0,1,3) \xrightarrow{+(4,4,-1)} Q(4,5,2)$   
 $Q(4,5,2) \xrightarrow{+2 \cdot (4,4,-1)} T(12,13,0)$



**Opgave 27:**

- a. lijn  $MP$  ligt in het vlak  $BCT$   
 $BC$  is de snijlijn van de vlakken  $BCT$  en  $ABC$   
 punt  $D$  is het snijpunt van  $MP$  en  $BC$   
 $C(0,6,0)$   $T(3,3,8)$   
 $M = (\frac{0+3}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{0+8}{2}) = (1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 4)$   
 $T(3,3,8)$   $B(6,6,0)$  dus  $\vec{TB} = (3,3,-8)$   
 $\vec{TP} = \frac{3}{4} \cdot \vec{TB} = \frac{3}{4} \cdot (3,3,-8) = (2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, -6)$   
 $P = T + \vec{TP} = (3,3,8) + (2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, -6) = (5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4}, 2)$   
 punt  $D$  ligt in het grondvlak, dus  $z_D = 0$

$$M(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 4) \xrightarrow{+(3\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -2)} P(5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4}, 2)$$

$$P(5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4}, 2) \xrightarrow{+(3\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -2)} D(9, 6, 0)$$

- b. lijn  $PQ$  ligt in het vlak  $ABT$   
 $AB$  is de snijlijn van de vlakken  $ABT$  en  $ABC$   
 punt  $E$  is het snijpunt van  $PQ$  en  $AB$   
 $\vec{TA} = (3, -3, -8)$   
 $Q = T + \frac{1}{4} \cdot \vec{TA} = (3,3,8) + \frac{1}{4} \cdot (3, -3, -8) = (3\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}, 6)$   
 punt  $E$  ligt in het grondvlak, dus  $z_E = 0$

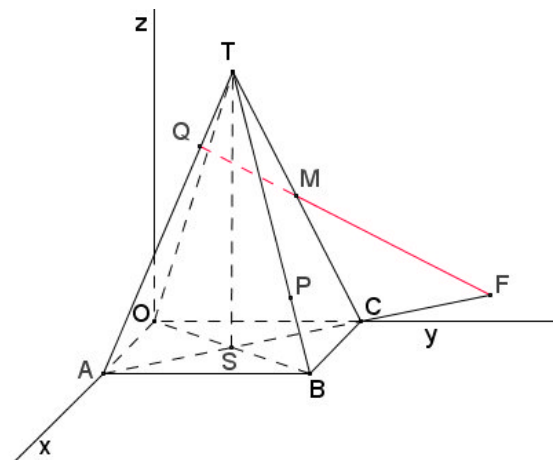
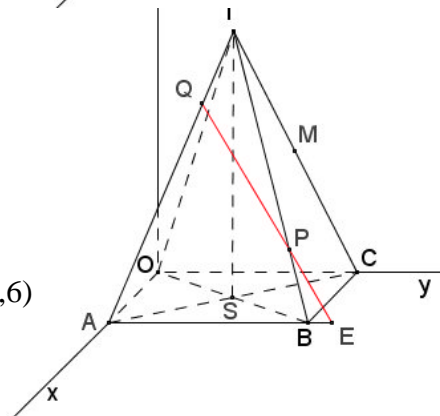
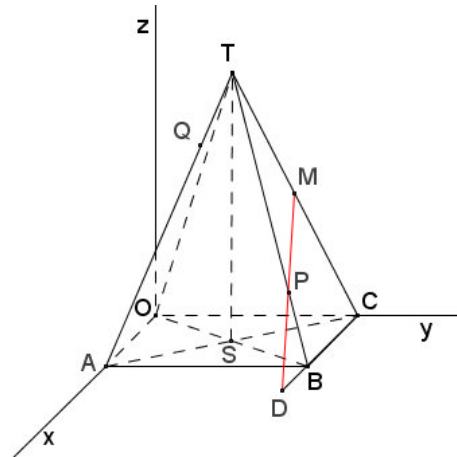
$$Q(3\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}, 6) \xrightarrow{+(1\frac{1}{2}, 3, -4)} P(5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4}, 2)$$

$$P(5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4}, 2) \xrightarrow{+\frac{1}{2} \cdot (1\frac{1}{2}, 3, -4)} E(6, 6\frac{3}{4}, 0)$$

- c. lijn  $QM$  ligt in het vlak  $ACT$   
 $AC$  is de snijlijn van de vlakken  $ACT$  en  $ABC$   
 punt  $F$  is het snijpunt van  $QM$  en  $AC$   
 punt  $F$  ligt in het grondvlak, dus  $z_F = 0$

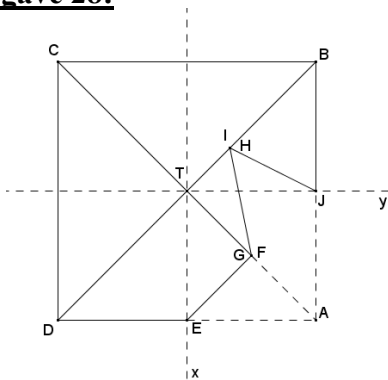
$$Q(3\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}, 6) \xrightarrow{+(-2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, -2)} M(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 4)$$

$$M(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 4) \xrightarrow{+2 \cdot (-2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, -2)} F(-3, 9, 0)$$



**Opgave 28:**

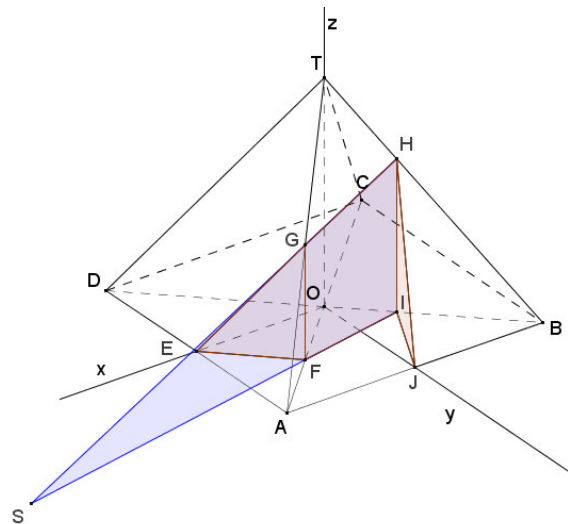
- a.



- b. lijn  $HG$  ligt in het verticale vlak  $HGFI$   
 de lijn  $FI$  is de snijlijn van de vlakken  $HGFI$  en het grondvlak  
 punt  $S$  is het snijpunt van  $HG$  en  $FI$   
 punt  $S$  ligt in het grondvlak, dus  $z_S = 0$

$$H(-2,2,6) \xrightarrow{+(5,1,-1\frac{1}{2})} G(3,3,4\frac{1}{2})$$

$$G(3,3,4\frac{1}{2}) \xrightarrow{+3(5,1,-1\frac{1}{2})} S(18,6,0)$$

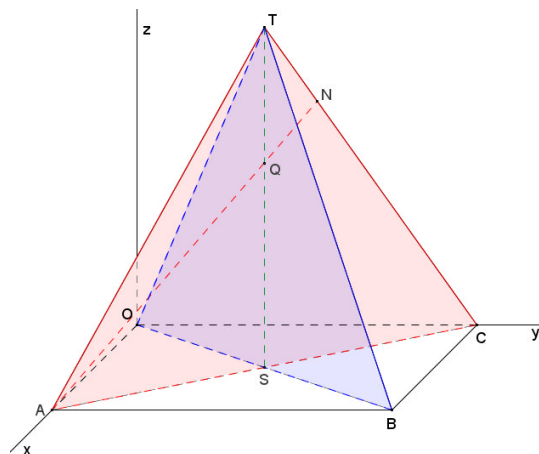


**Opgave 29:**

- a.  $AM = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$   
 b.  $\triangle ABS$  en  $\triangle MDS$  vormen een zandloperfiguur  
 c.  $\frac{AS}{MS} = \frac{AB}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$   
 d.  $AS : MS = 2 : 1$  dus  $MS = \frac{1}{2} \cdot AS$   
 $AM = AS + MS = AS + \frac{1}{2} \cdot AS = 1\frac{1}{2} \cdot AS$  dus  $AS = \frac{2}{3} \cdot AM$   
 e.  $AS = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

**Opgave 30:**

- a.  $AN$  ligt in het vlak  $ACT$   
 lijn  $ST$  is de snijlijn van de vlakken  $ACT$  en  $OBT$   
 punt  $Q$  is het snijpunt van  $AN$  en  $ST$



- b.  $\triangle CPN \sim \triangle CST$  (snavefiguur)

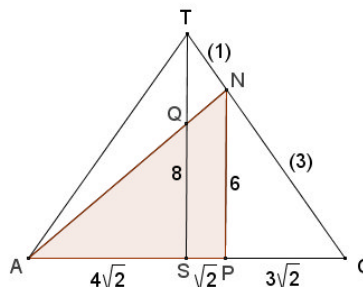
$$\frac{PN}{ST} = \frac{CN}{CT}$$

$$\frac{PN}{8} = \frac{3}{4} \text{ dus } PN = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6$$

$$\triangle ASQ \sim \triangle APN$$

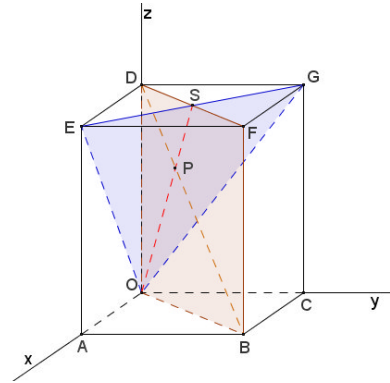
$$\frac{SQ}{PN} = \frac{AS}{AP}$$

$$\frac{SQ}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5} \text{ dus } SQ = 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ dus } Q = (4,4,4\frac{4}{5})$$

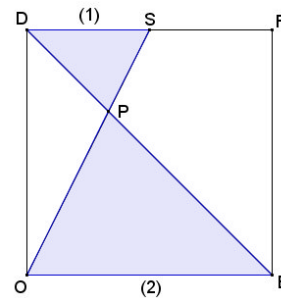


**Opgave 31:**

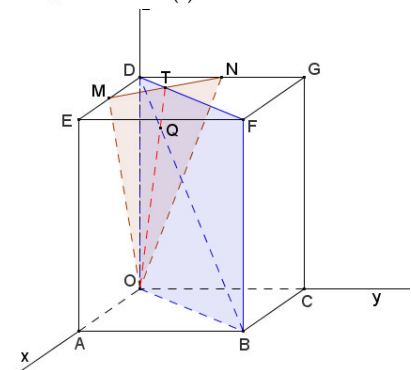
- a.  $BD$  ligt in het hulpvlak  $OBFD$   
 $OS$  is de snijlijn van de vlakken  $OEG$  en  $OBFD$   
 punt  $P$  is het snijpunt van  $BD$  en  $OS$



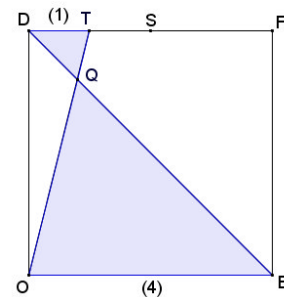
- b.  $B(3,4,0)$   $D(0,0,5)$  dus  $\overrightarrow{BD} = (-3, -4, 5)$   
 $P = B + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BD} = (3, 4, 0) + \frac{2}{3} \cdot (-3, -4, 5) = (1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$



- c.  $BD$  ligt in het hulpvlak  $OBFD$   
 $OT$  is de snijlijn van de vlakken  $OMN$  en  $OBFD$   
 punt  $Q$  is het snijpunt van de lijnen  $BD$  en  $OT$

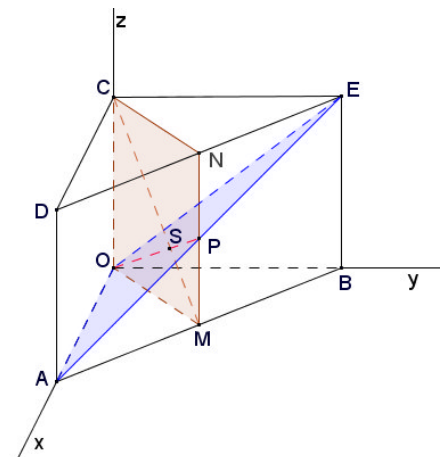


- d.  $Q = B + \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{BD} = (3, 4, 0) + \frac{4}{5} \cdot (-3, -4, 5) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 4)$

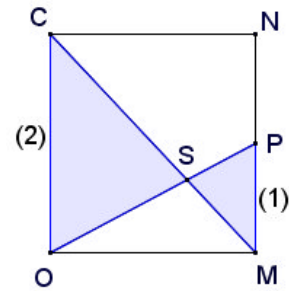


**Opgave 32:**

- a.  $CM$  ligt in het verticale hulpvlak  $OMNC$   
 $OP$  is de snijlijn van de vlakken  $OAE$  en  $OMNC$   
 punt  $S$  is het snijpunt van  $CM$  en  $OP$

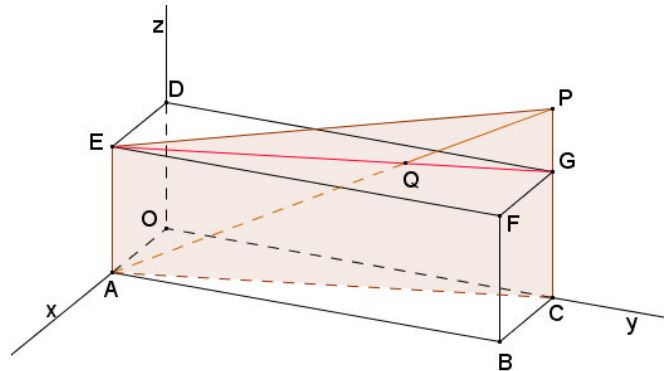


- b.  $M(2,2,0) \quad P(2,2,1\frac{1}{2})$   
 $S = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3} \cdot (2,2,1\frac{1}{2}) = (1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 1)$

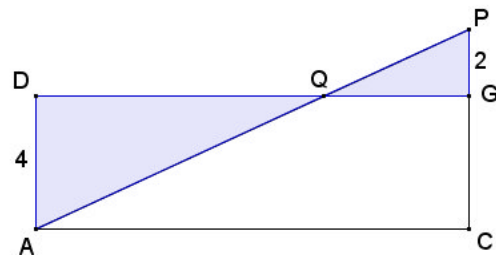


**Opgave 33:**

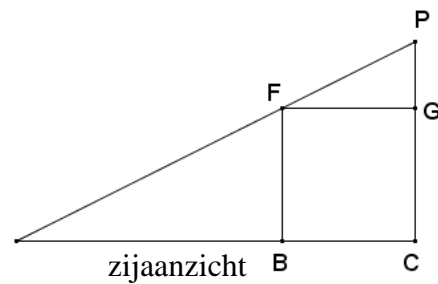
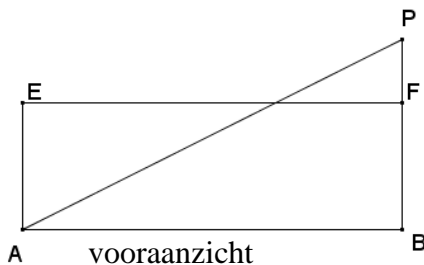
- a.  $AP$  ligt in het verticale vlak  $ACPE$   
 $EG$  is de snijlijn van de vlakken  $ACPE$  en  $DEFG$   
 punt  $Q$  is het snijpunt van  $AP$  en  $EG$



- b.  $Q = A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AP} = (4,0,0) + \frac{2}{3} \cdot (-4,12,6)$   
 $Q = (1\frac{1}{3}, 8, 4)$



- c.



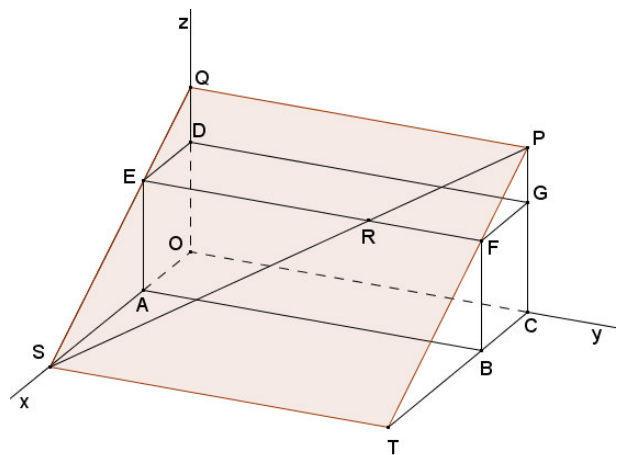
- d. teken door punt  $P$  de lijn evenwijdig aan de  $y$ -as, deze snijdt de  $z$ -as in punt  $Q$   
 teken de lijn  $QE$ , deze snijdt de  $x$ -as in punt  $S$   
 teken de lijn  $PF$ , deze snijdt de lijn  $BC$  in punt  $T$   
 teken het vlak  $PQST$   
 punt  $R$  is het snijpunt van  $PS$  en  $EF$

- e.  $P(0,12,6) \quad S(12,0,0)$

$$\overrightarrow{PS} = (12, -12, -6)$$

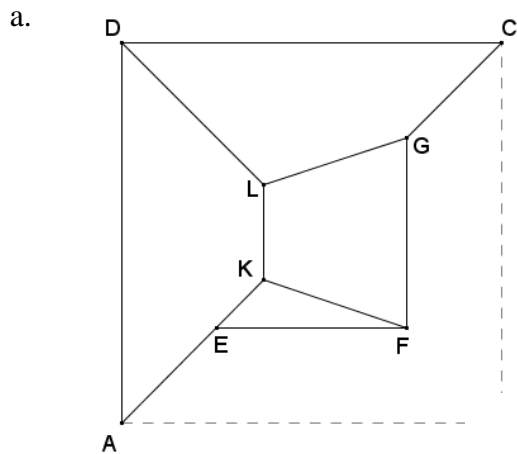
punt  $R$  ligt op  $EF$  dus  $z_R = 4$

$$R = P + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{PS} = (0,12,6) + \frac{1}{3} \cdot (12, -12, -6) = (4, 8, 4)$$

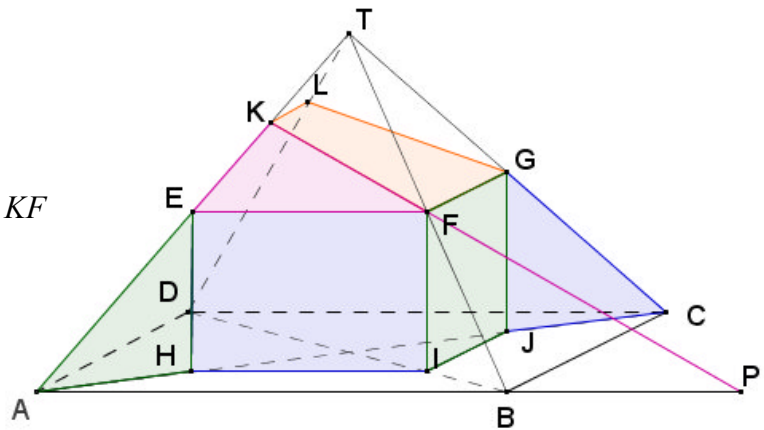




**Opgave 34:**

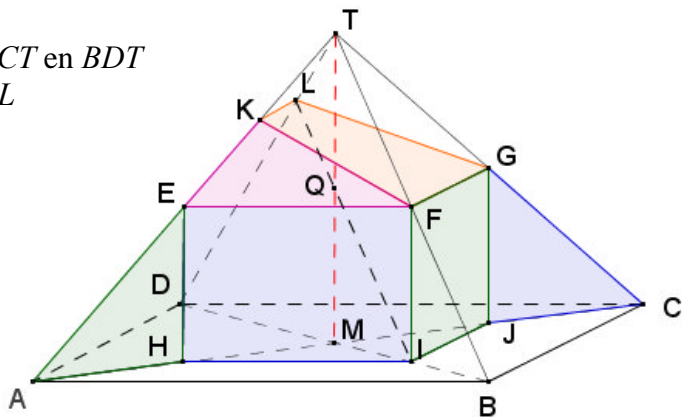


- b.  $KF$  ligt in het vlak  $ABT$   
 $AB$  is de snijlijn van de vlakken  $ABCD$  en  $ABT$   
 punt  $P$  is het snijpunt van  $AB$  en  $KF$



- c.  $A = (6, -6, 0)$   
 $B(6, 6, 0)$   
 $T(0, 0, 8)$   
 $E(3, -3, 4)$   
 $F(3, 3, 4)$   
 $K(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, 6)$   
 $\vec{KF} = (1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, -2)$   
 Punt  $P$  ligt in het grondvlak, dus  $z_p = 0$   
 $P = (3, 3, 4) + 2 \cdot (1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, -2) = (6, 12, 0)$

- d. lijn  $IL$  ligt in het vlak  $BDT$   
 $TM$  is de snijlijn van de vlakken  $ACT$  en  $BDT$   
 punt  $Q$  is het snijpunt van  $TM$  en  $IL$   
 $I(3, 3, 0)$   $L(-1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, 6)$   
 $\vec{IL} = (-4\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}, 6)$   
 $Q = I + \frac{2}{3} \cdot \vec{IL}$   
 $= (3, 3, 0) + \frac{2}{3} \cdot (-4\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}, 6)$   
 $= (0, 0, 4)$



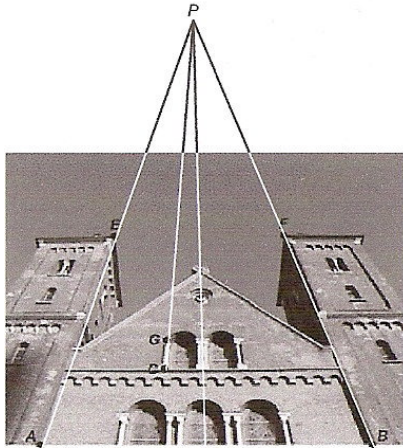
### 5.3 Centrale projectie

#### Opgave 35:

- a.
- b. ja
- c. de lijnen in vlak  $ABFE$  gaan door punt  $P$   
de lijnen in vlak  $BCGF$  gaan door punt  $Q$



#### Opgave 36:

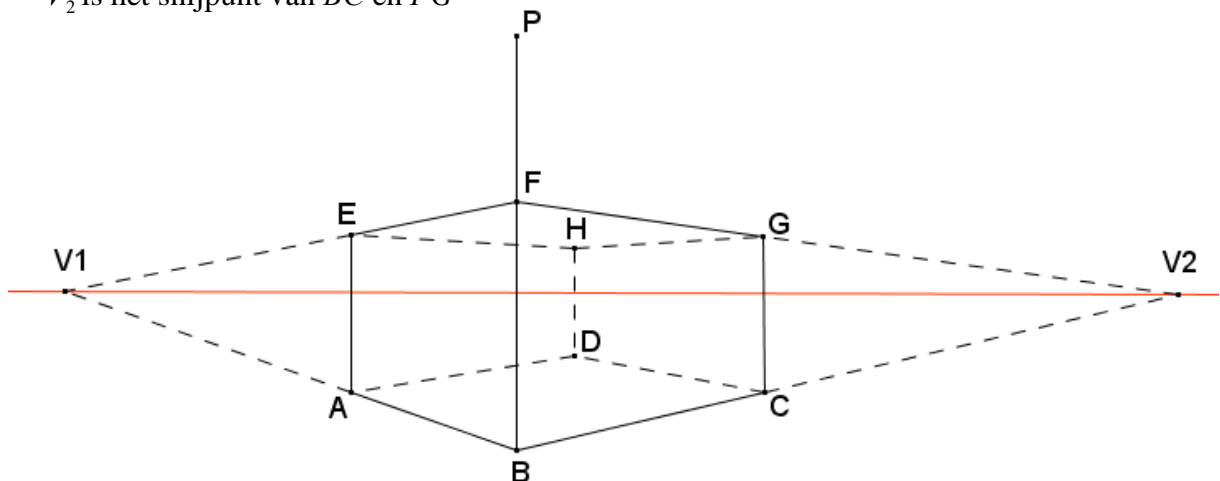


#### Opgave 37:

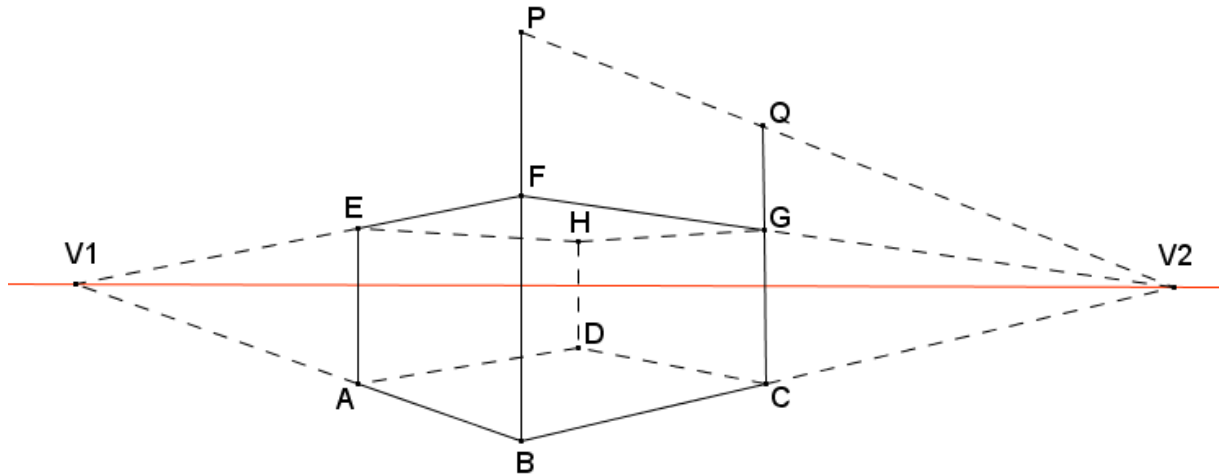
- a. foto a:  $AD$  en  $BC$   
foto b:  $AB$  en  $CD$   
foto c:  $AE$  en  $BF$
- b. foto a:  $AE$  en  $BF$   
foto b:  $AE$  en  $BF$   
foto c:  $AB$  en  $CD$
- c. de foto's zijn vanaf een verschillend standpunt genomen

#### Opgave 38:

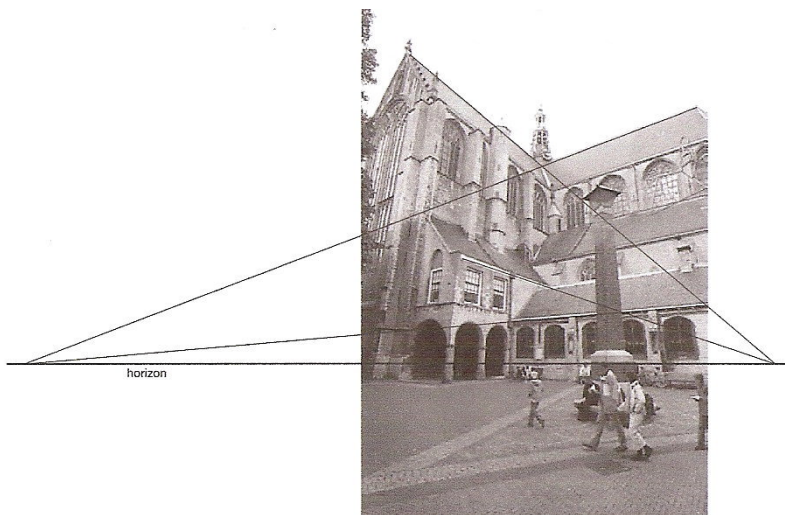
- a.  $V_1$  is het snijpunt van  $AB$  en  $EF$   
 $V_2$  is het snijpunt van  $BC$  en  $FG$



- b. Teken lijnstuk  $PV_2$   
 Punt  $Q$  is het snijpunt van  $PV_2$  en  $CG$



**Opgave 39:**



**Opgave 40:**

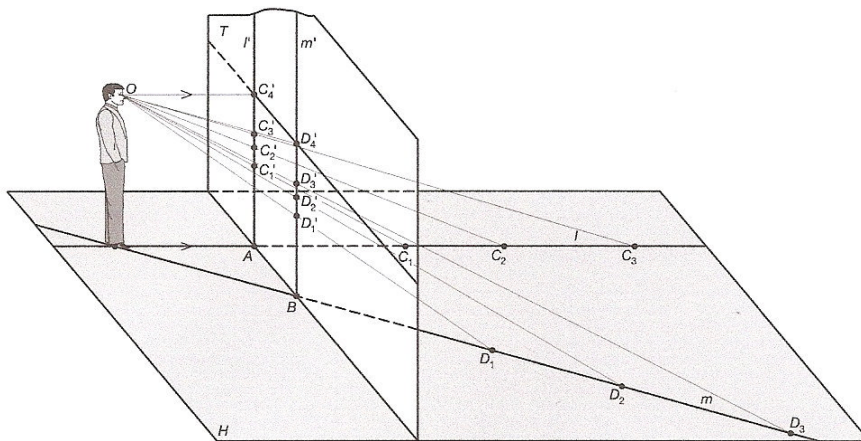
- a. In foto a zijn de lijnstukken  $AB$  en  $EF$  evenwijdig met de horizon.  
 In foto b zijn deze lijnstukken niet evenwijdig met de horizon.  
 b. Het snijpunt van de lijnen  $AD$ ,  $BC$ ,  $EH$  en  $FG$ .

**Opgave 41:**

- a. foto I  
 b. Foto II is vanaf ooghoogte genomen en foto III is vanaf een grotere hoogte genomen.

**Opgave 42:**

a.

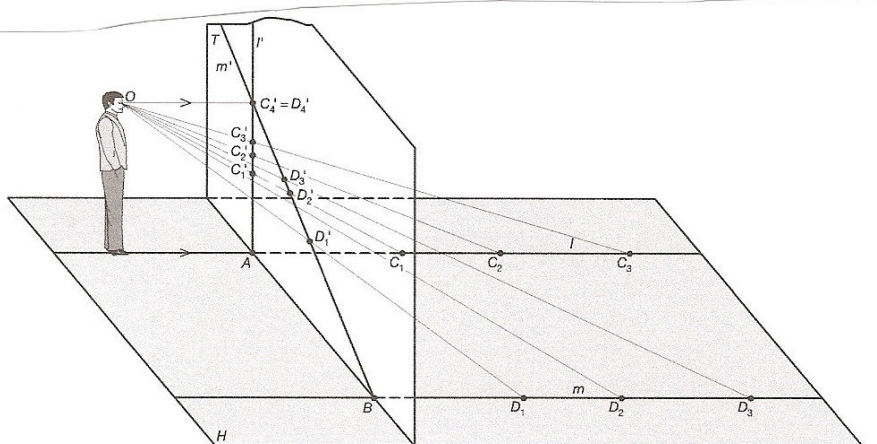


- b.  $OC_4$  is evenwijdig met  $l$
- c. zie tekening
- d. zie tekening
- e.  $C_4'D_4'$

**Opgave 43:**

a.

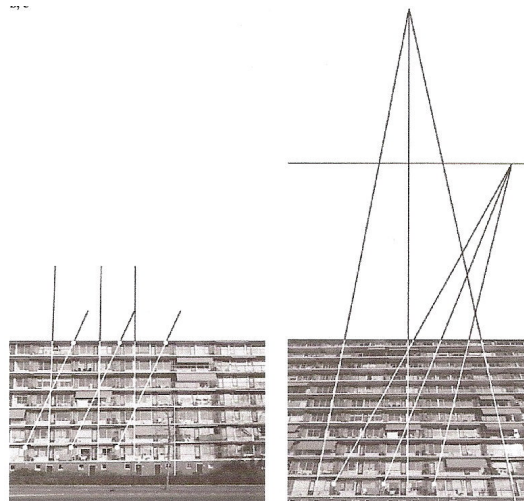
b.



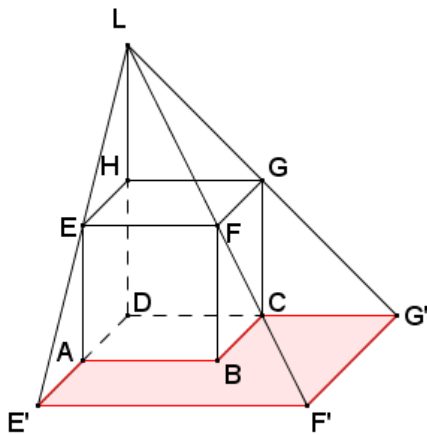
- c.  $OD_4$  is evenwijdig met  $OC_4'$ , dus punt  $D_4'$  is hetzelfde punt als punt  $C_4'$
- d. zie tekening

**Opgave 44:**

- a. foto I is van Sanne
- b. Op de foto van Sanne hebben de verticale lijnen geen verdwijnpunt. Op de foto van Michiel hebben de verticale lijnen wel een verdwijnpunt.
- c.

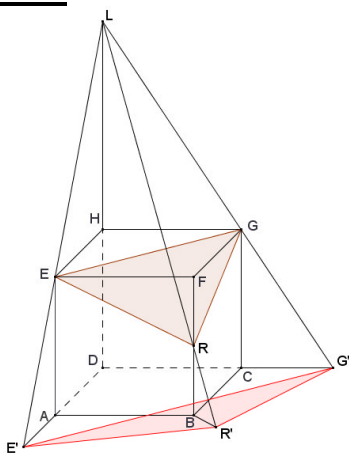


**Opgave 45:**



**Opgave 46:**

a.



b.  $\triangle AEE' \sim \triangle DLE'$  (snavefiguur)

$$\text{dus } \frac{AE}{DL} = \frac{AE'}{DE'}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{AE'}{AE' + 4}$$

$$10AE' = 4(AE' + 4)$$

$$10AE' = 4AE' + 16$$

$$6AE' = 16$$

$$AE' = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$$

$$\text{zo ook } CG' = 2\frac{2}{3}$$

punt  $R$  is het midden van  $BF$  dus punt  $R'$  is het midden van  $B'F'$

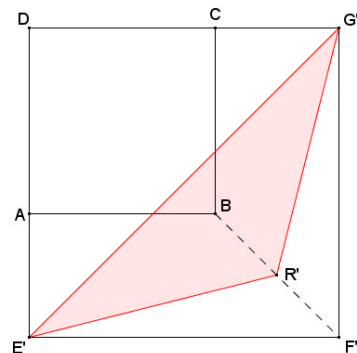
in  $\triangle EFR'$  is de afstand van punt  $R'$  tot  $EF'$  gelijk aan  $1\frac{1}{3}$

$$Opp(DE'F'G') = 6\frac{2}{3} \cdot 6\frac{2}{3} = 44\frac{4}{9}$$

$$Opp(\triangle E'F'G') = \frac{1}{2} \cdot 44\frac{4}{9} = 22\frac{2}{9}$$

$$Opp(\triangle E'F'R') = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{3} = 4\frac{4}{9}$$

$$Opp(\triangle E'R'G') = Opp(\triangle E'F'G') - 2 \cdot Opp(\triangle E'F'R') = 22\frac{2}{9} - 2 \cdot 4\frac{4}{9} = 13\frac{3}{9} = 13\frac{1}{3}$$



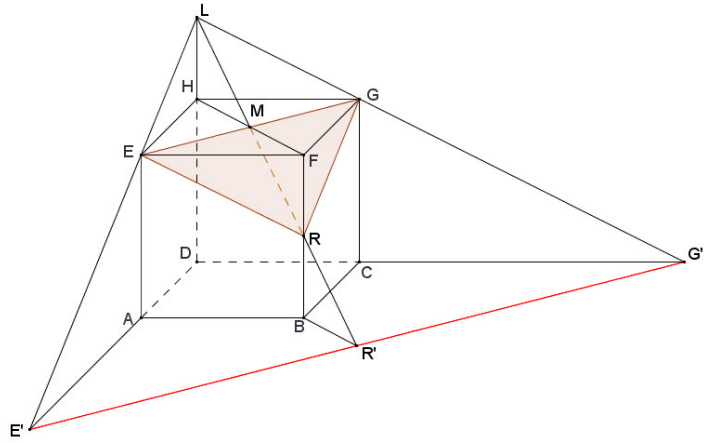
- c. Punt  $M$  is het snijpunt van  $EG$  en  $FH$ .  
 $L$  is het snijpunt van  $MR$  en  $DH$

$$\triangle FRM \sim \triangle HLM \text{ (zandloper)}$$

$$\frac{HL}{FR} = \frac{HM}{FM}$$

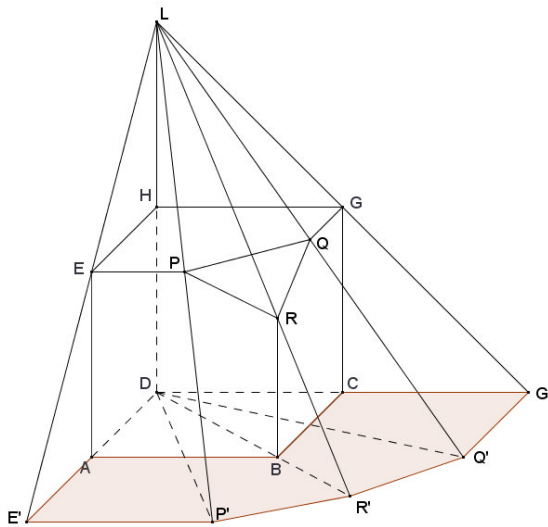
$$\frac{HL}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$HL = 2$$

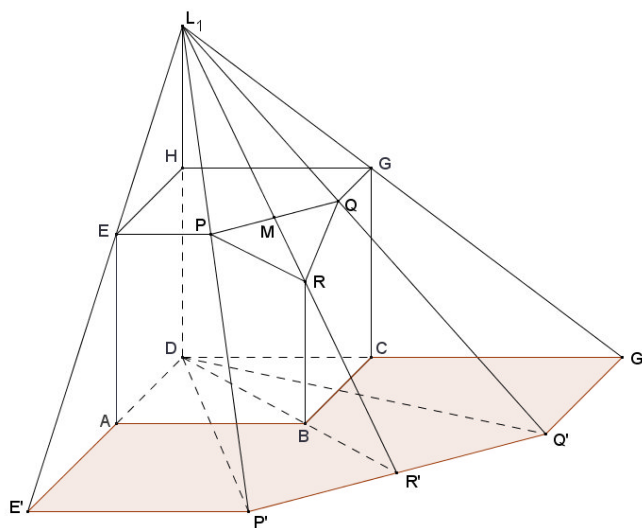


**Opgave 47:**

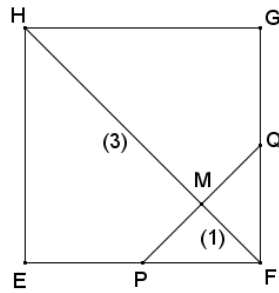
a.



- b. punt  $M$  is het midden van  $PQ$   
 punt  $R'$  is het snijpunt van  $BD$  en  $MR$   
 punt  $L_1$  is het snijpunt van  $MR$  en  $DH$



c.  $\frac{FM}{HM} = \frac{1}{3}$   
 dus  $\frac{FR}{HL_1} = \frac{1}{3}$   
 $\frac{1}{HL_1} = \frac{1}{3}$   
 dus  $HL_1 = 3$



$$\triangle AEE' \sim \triangle HL_1E$$

$$\frac{AE'}{HE} = \frac{HE}{HL_1}$$

$$\frac{AE'}{4} = \frac{4}{3}$$

$$AE' = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$\triangle DAU \sim \triangle DE'P'$$

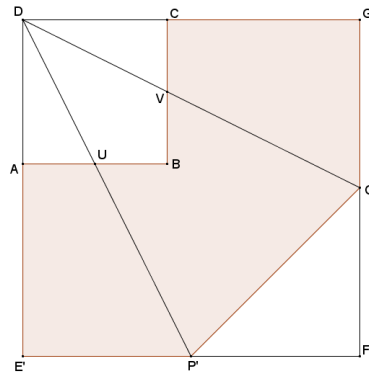
$$\frac{DA}{DE'} = \frac{AU}{E'P'}$$

$$\frac{4}{9\frac{1}{3}} = \frac{2}{E'P'}$$

$$E'P' = 4\frac{2}{3}$$

$$P'F' = 9\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$$

$$Opp(\text{schaduw}) = 9\frac{1}{3} \cdot 9\frac{1}{3} - 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot 4\frac{2}{3} = 60\frac{2}{9}$$



**Opgave 48:**

a. nee dat is niet mogelijk.

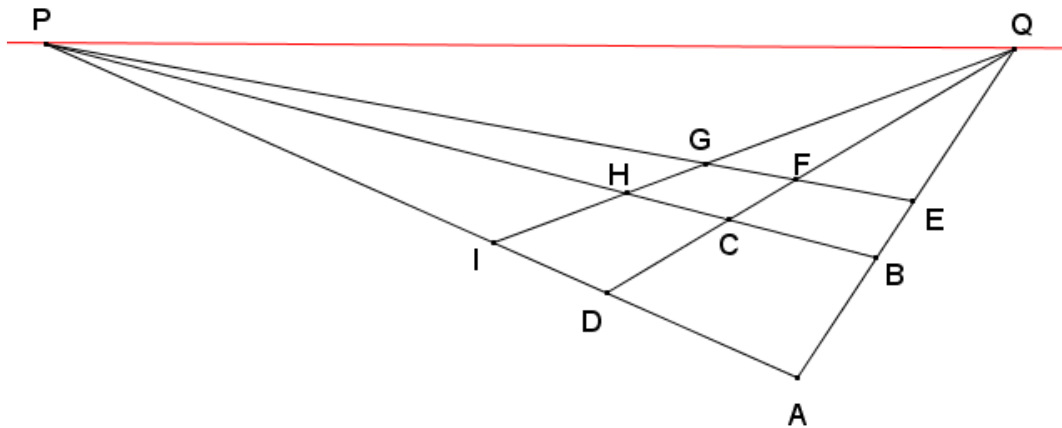
Alleen als de hoogte van de lamp gelijk is aan de hoogte van het boek, vallen de schaduwen van de punten A, B en C op één lijn, maar dan liggen deze schaduwen op de horizon.

b. dan moet de lamp in het vlak van de voorkant of in het vlak van de achterkant liggen.

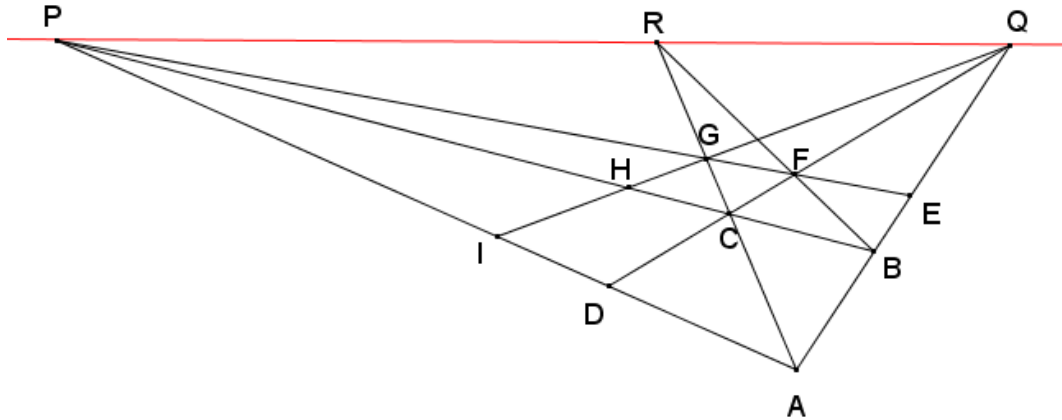
## 5.4 Verdubbelen in perspectief

### Opgave 49:

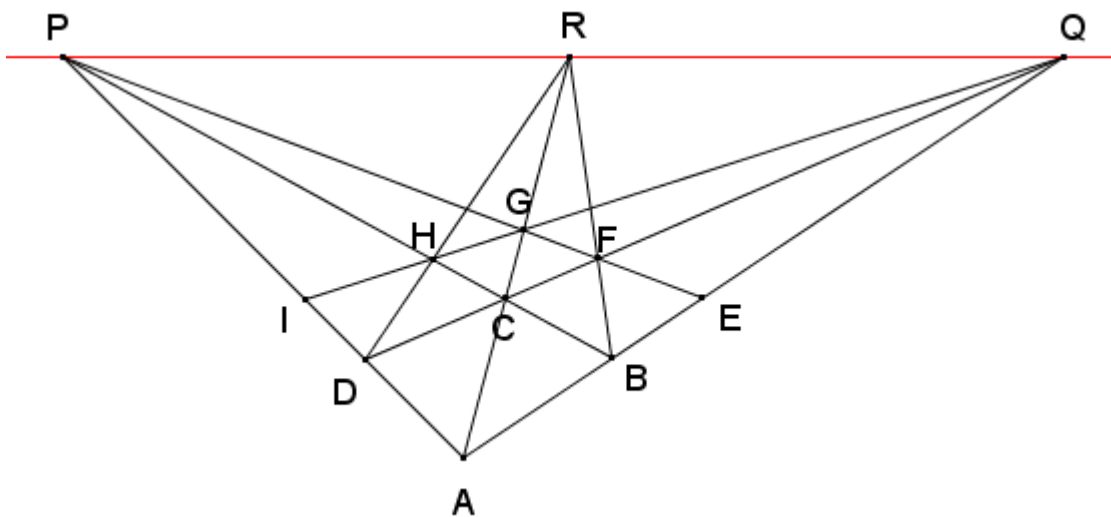
a.



b.



### Opgave 50:



Teken verdwijnpunt  $P$  dat bij  $AD$  en  $BC$  hoort en verdwijnpunt  $Q$  dat bij  $AB$  en  $CD$  hoort.

Teken de horizon  $PQ$ .

Punt  $R$  is het verdwijnpunt dat hoort bij  $BF$  en  $AC$ .

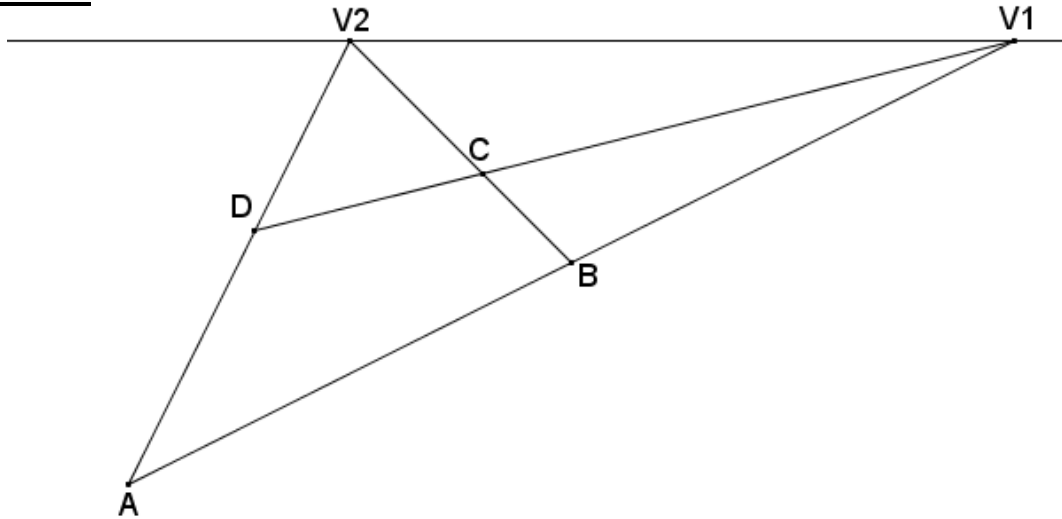
Punt  $G$  is het snijpunt van  $AC$  en  $EF$ .

Teken lijnstuk  $QG$  en verleng tot punt  $I$  op  $AP$ .

Punt  $H$  is het snijpunt van  $BP$  en  $QI$

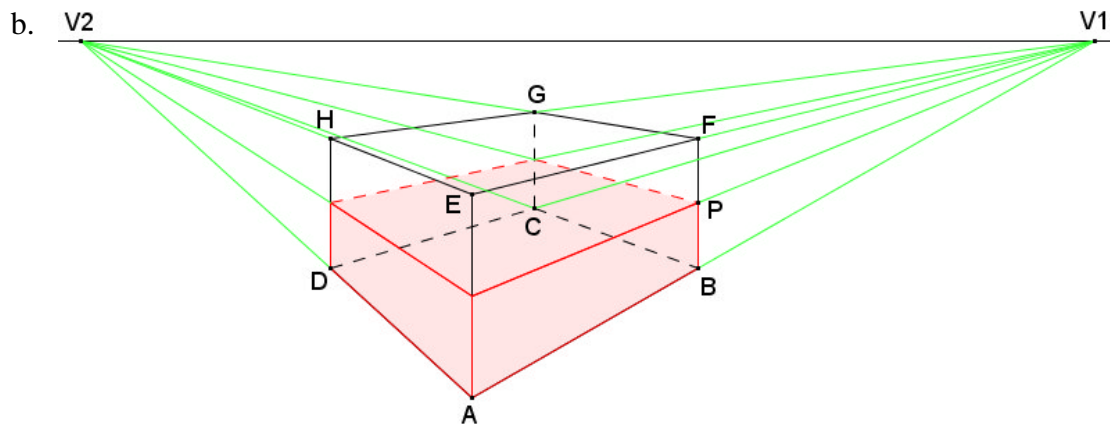
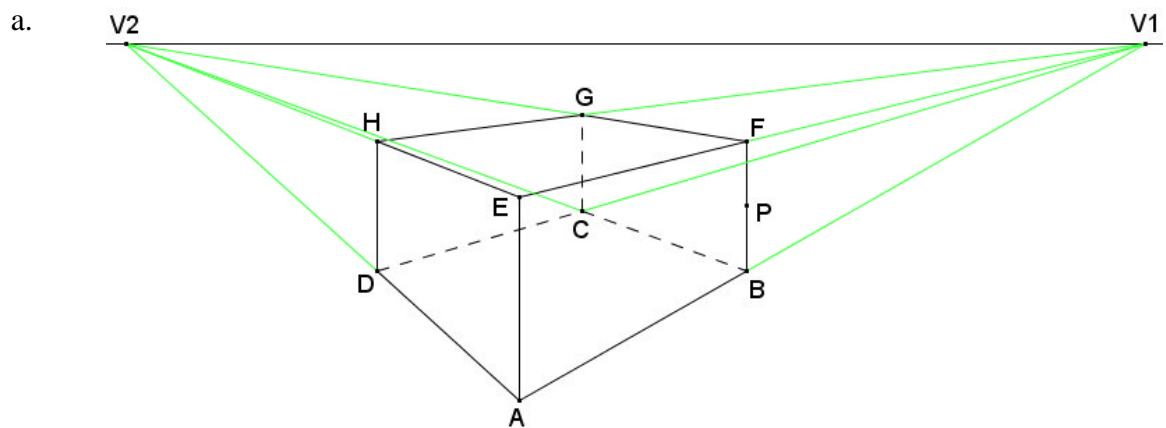


**Opgave 51:**



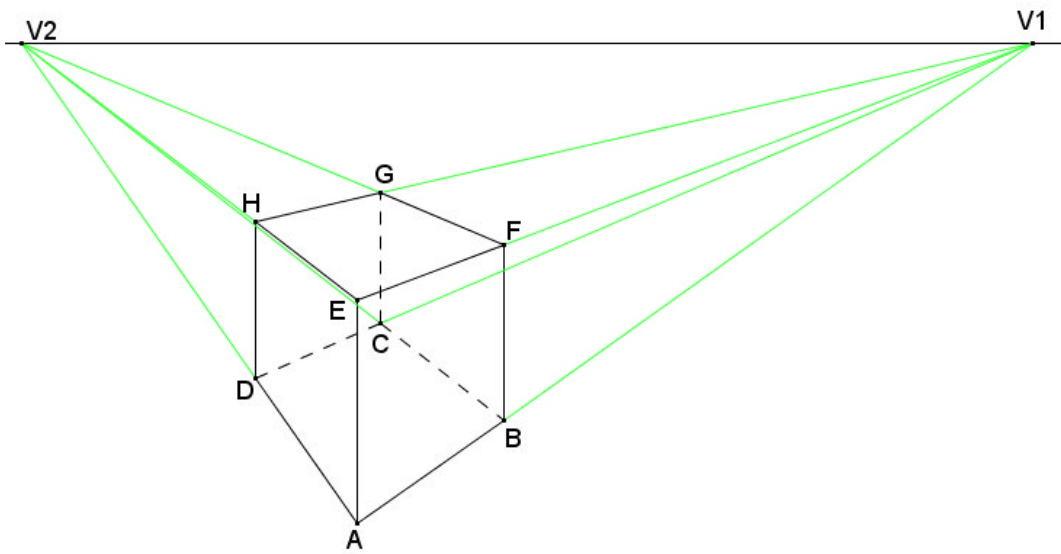
De lijn door  $A$  en  $B$  snijdt de horizon in punt  $V1$ .  
De lijn door  $B$  en  $C$  snijdt de horizon in punt  $V2$ .  
Teken lijn stuk  $AV2$ .  
De lijn door  $C$  en  $V1$  snijdt lijnstuk  $AV2$  in punt  $D$ .

**Opgave 52:**

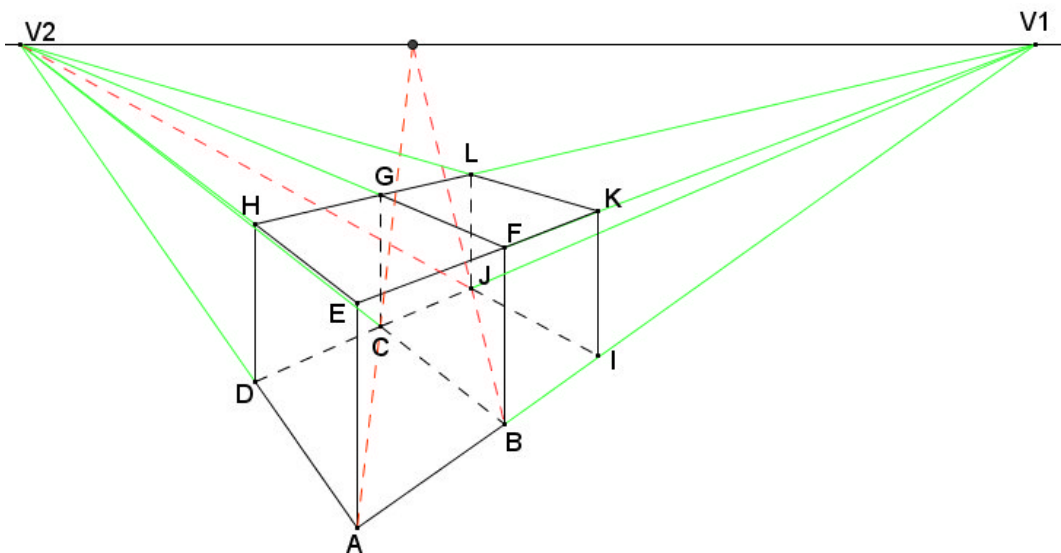


**Opgave 53:**

a.



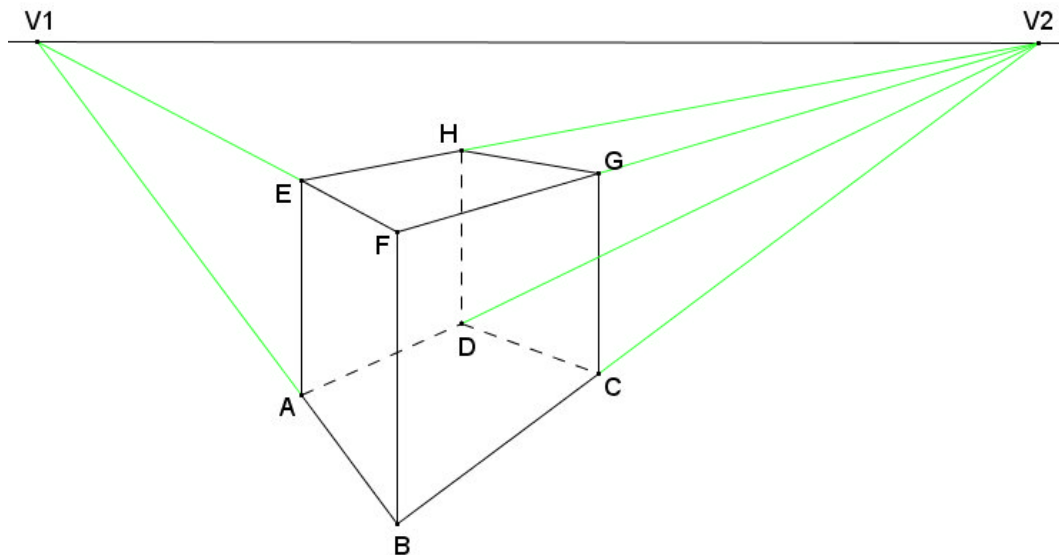
b.



**Opgave 54:**

a.  $AB$  en  $CD$  snijden elkaar niet op de horizon, dus  $AB$  is niet evenwijdig met  $CD$ , dus het prisma is geen balk

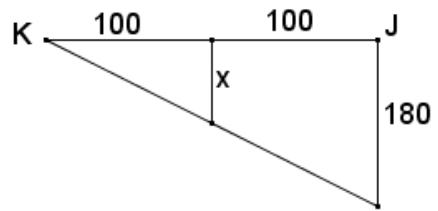
b.



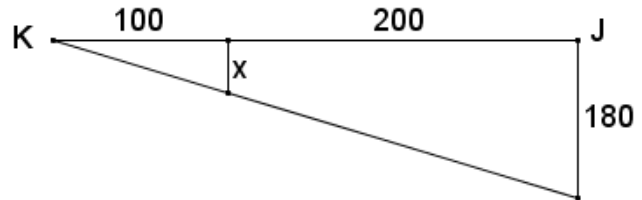
c.  $AB$  en  $CD$  snijden elkaar voor de horizon, dus  $BC$  is langer dan  $AD$ .

**Opgave 55:**

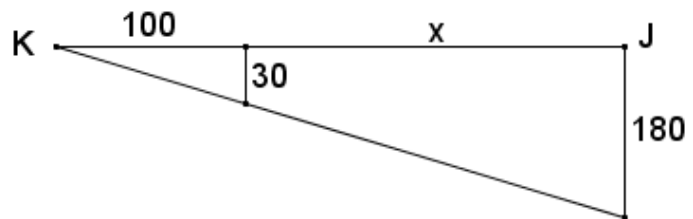
a.  $\frac{x}{100} = \frac{180}{200}$   
 $x = 90$  cm



b.  $\frac{x}{180} = \frac{100}{300}$   
 $x = 60$  cm



c.  $\frac{30}{180} = \frac{100}{x+100}$   
 $30(x+100) = 18000$   
 $30x + 3000 = 18000$   
 $30x = 15000$   
 $x = 500$



Of: 30 wordt 6×zo groot dus 100 wordt 6×zo groot, dus  $KJ = 600$  dus  $x = 500$

Als de lengte van het beeld 15 cm is:

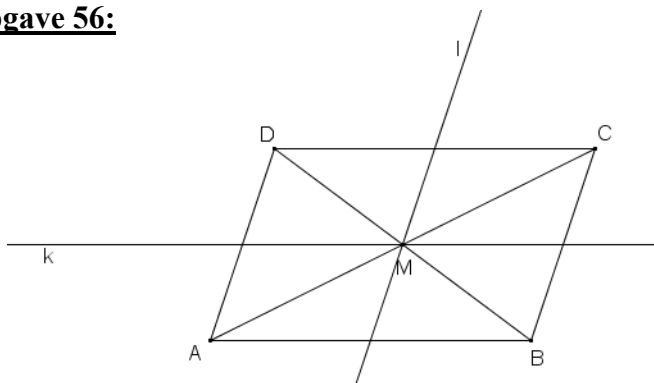
15 wordt 12×zo groot dus 100 wordt 12×zo groot, dus  $KJ = 1200$  dus  $x = 1100$

Als de lengte van het beeld 1 cm is:

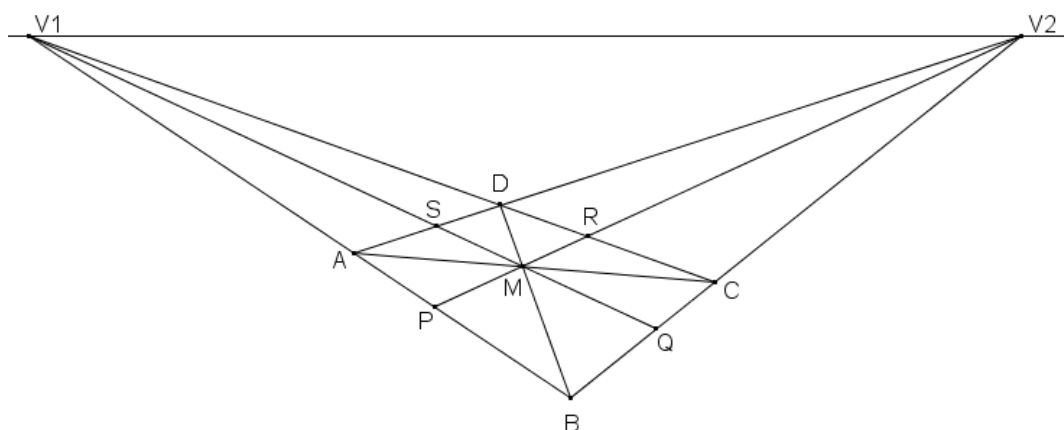
1 wordt 180× zo groot dus 100 wordt 180×zo groot, dus  $KJ = 18000$  dus  $x = 17900$

**Opgave 56:**

a.

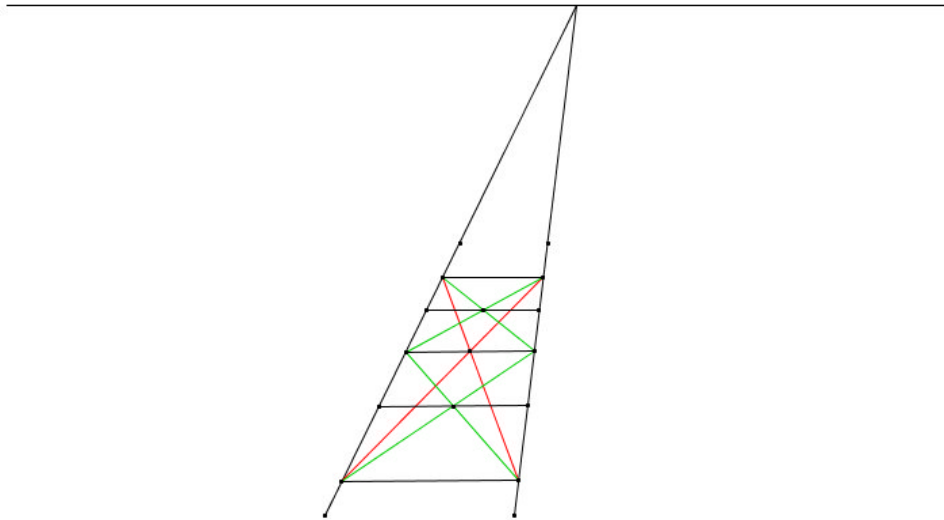


b.

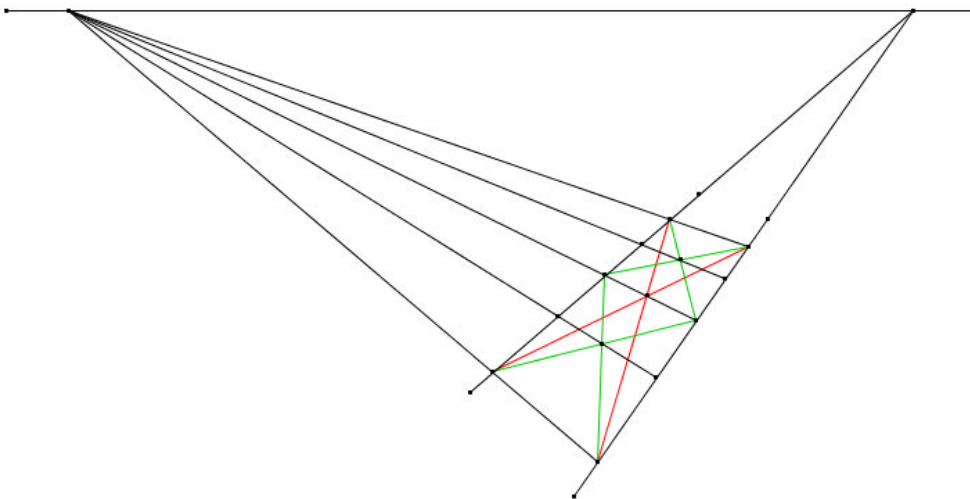


**Opgave 57:**

a.



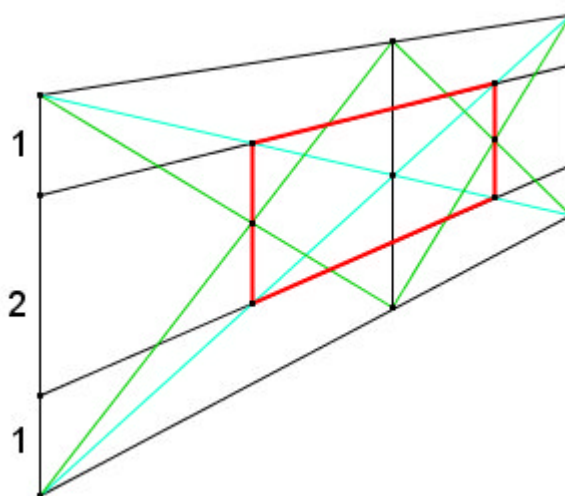
b.



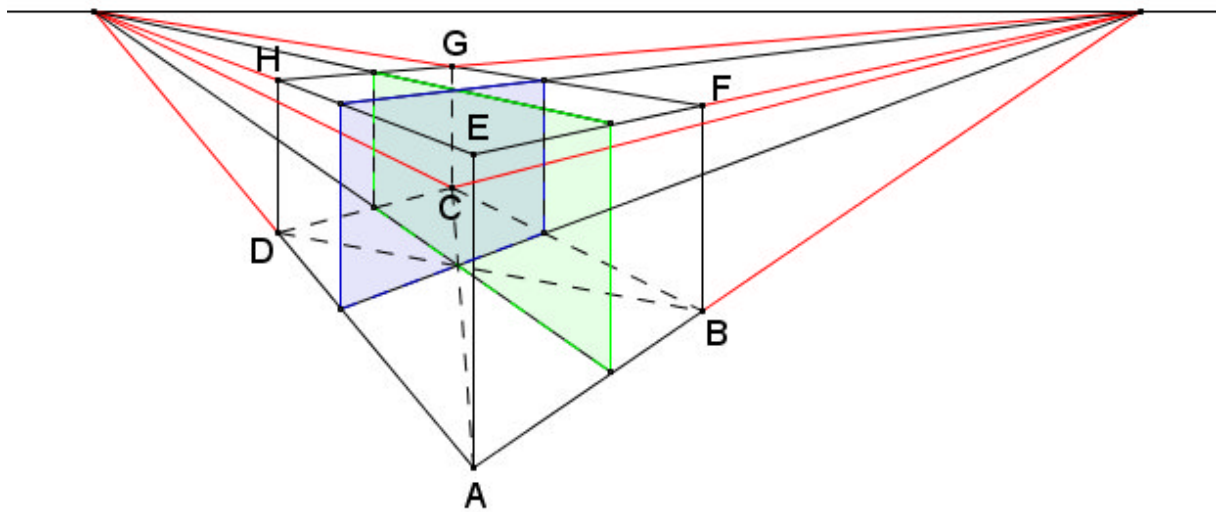
**Opgave 58:**

Omdat de linker zijkant van de muur verticaal loopt, mag je op deze muur gewoon meten. Dus je kunt op dit lijnstuk punten afpassen op een afstand van 1, 2 en 1 van elkaar. Hetzelfde geldt voor het rechter lijnstuk.

Omdat het schilderij in de lengte precies de helft is van de lengte van de muur, kun je de middens steeds vinden op dezelfde manier als in opgave 57a.



**Opgave 59:**

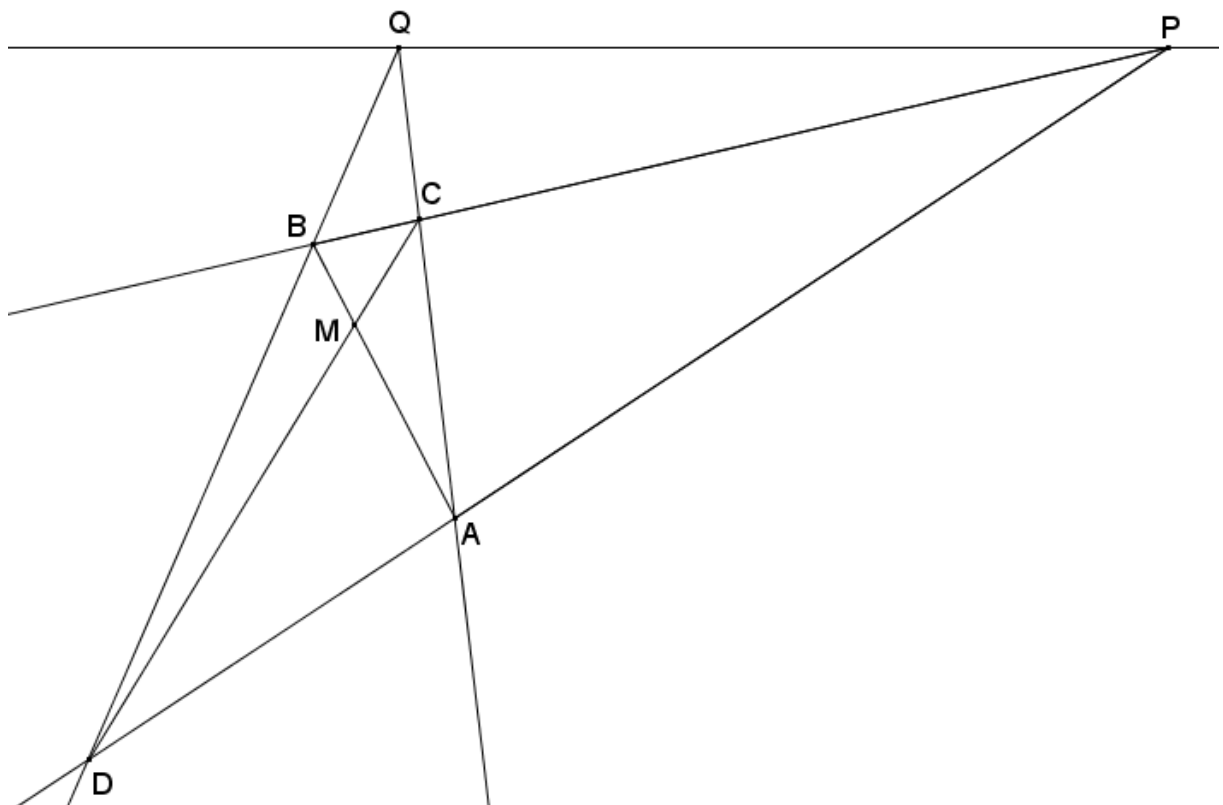


**Opgave 60:**

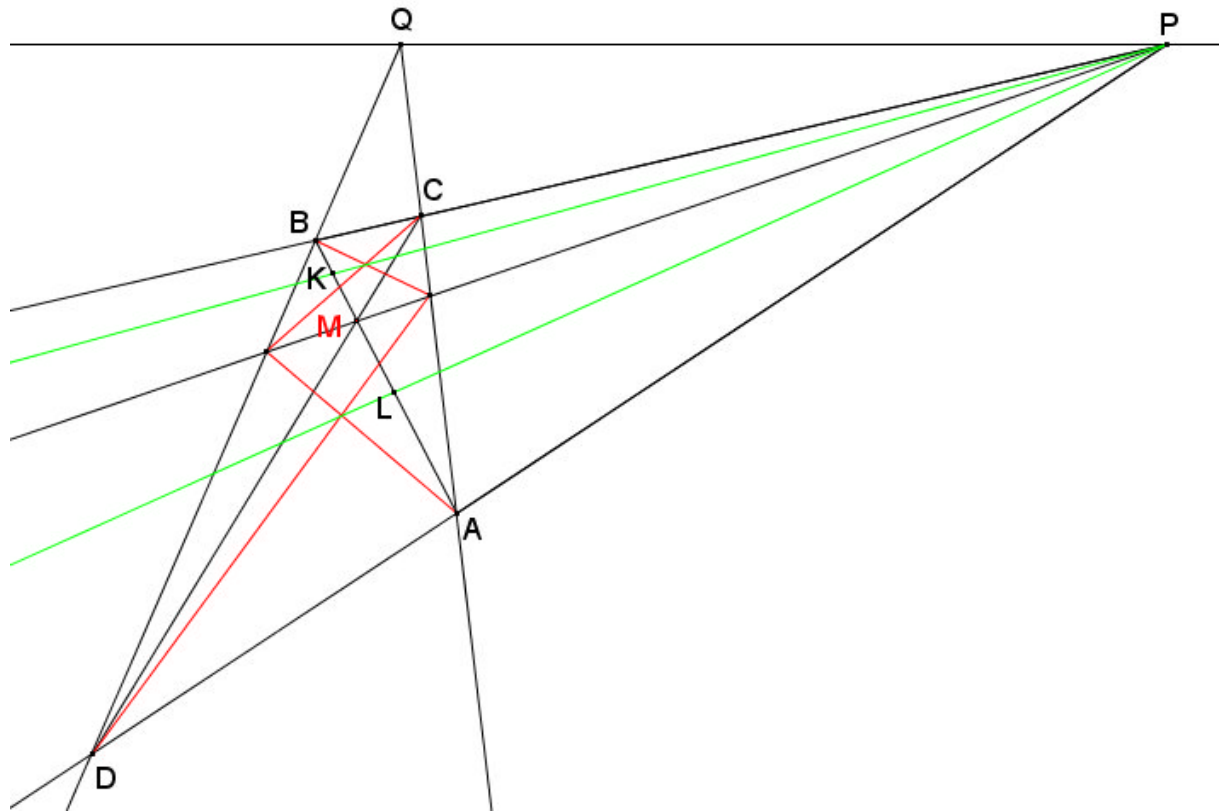
*AB* moet evenwijdig liggen met de horizon of loodrecht op de horizon.

**Opgave 61:**

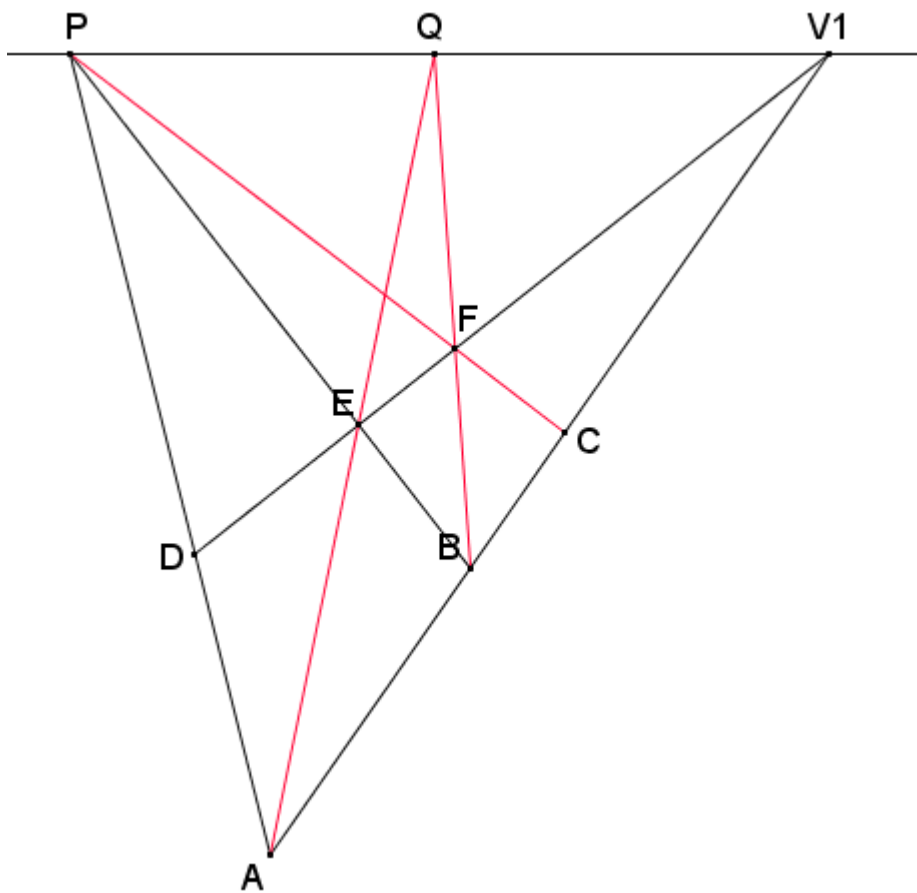
a.



b.

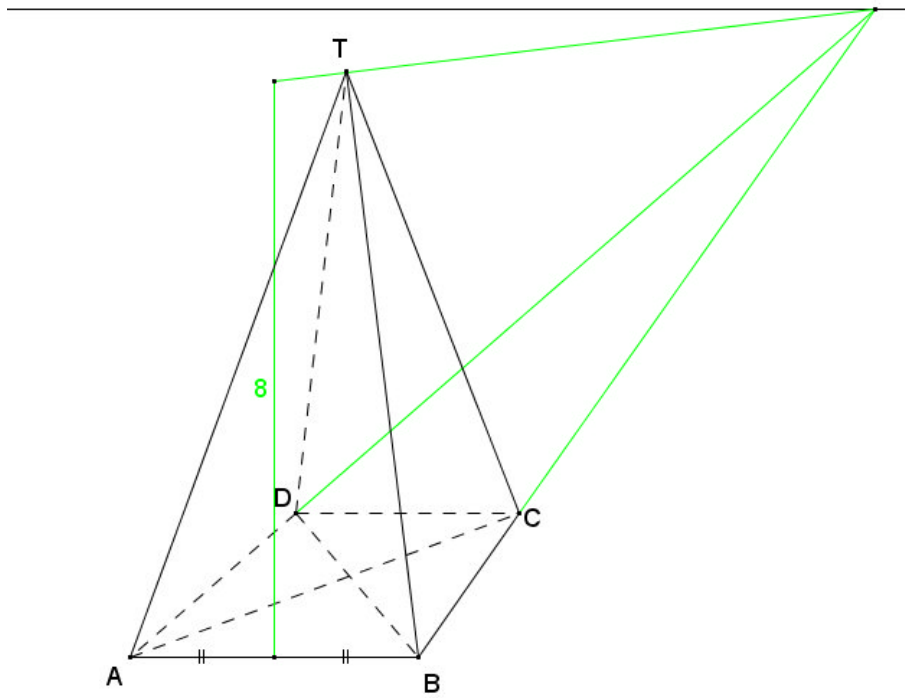


**Opgave 62:**

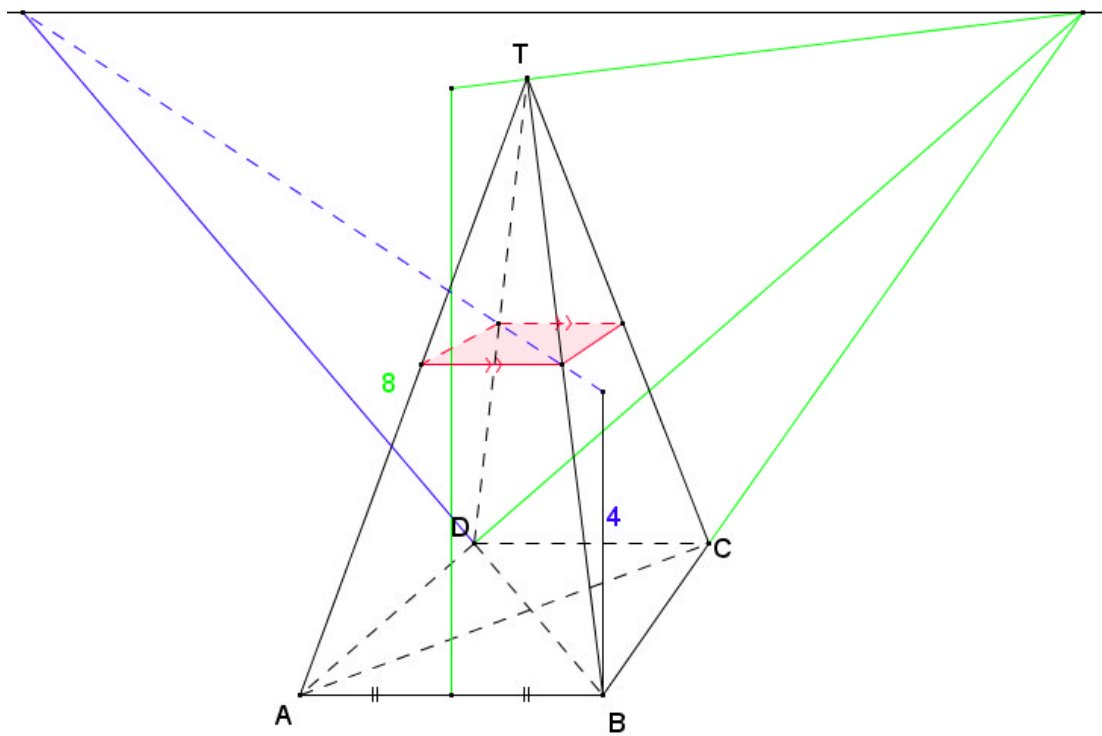


**Opgave 63:**

a.



b.



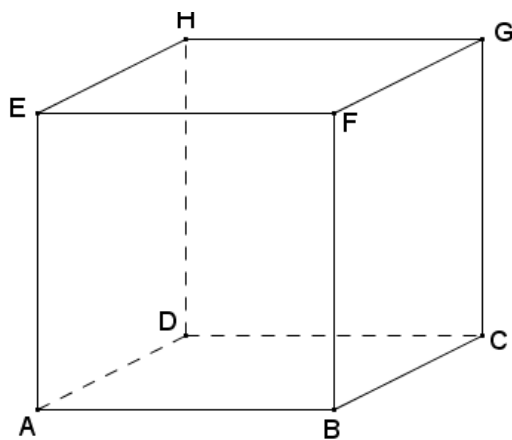
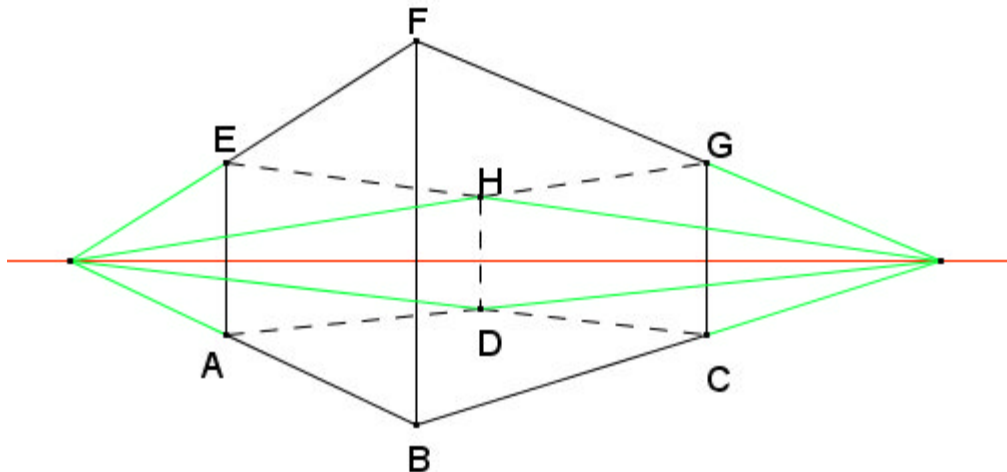
## 5.5 Parallelprojectie

### Opgave 64:

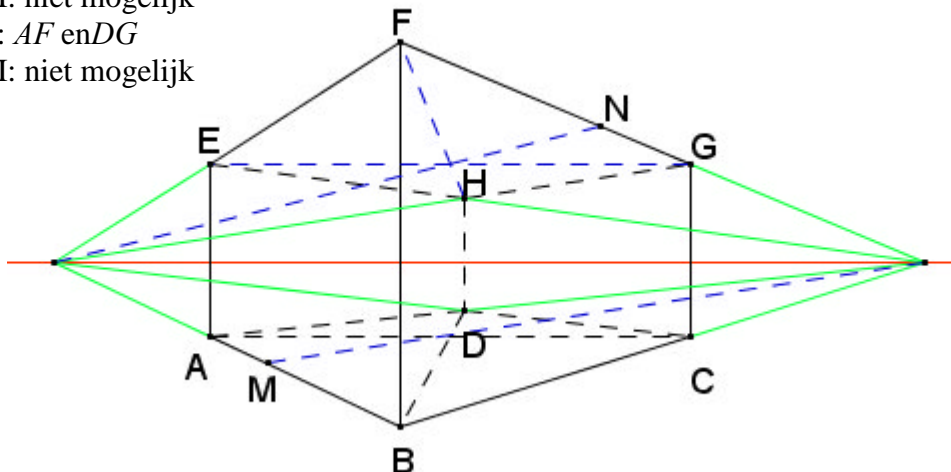
- $AD$  en  $BC$  zijn zowel in de tekening als in het echt evenwijdig. Als de tekening in perspectief was, dan zouden  $AD$  en  $BC$  elkaar snijden in een verdwijnpunt.
- ja, je ogen bevinden zich rechtsboven ten opzichte van de kubus.
- $BF = CG$  en het midden van  $BC$  in de tekening is ook het midden van  $BC$  in werkelijkheid.
- het achtervlak is even groot als het voorvlak.

### Opgave 65:

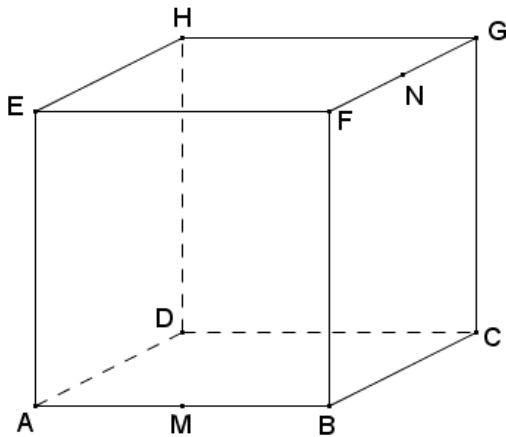
a.



- figuur I:  $AB$  en  $EF$   
figuur II: niet mogelijk
- figuur I:  $AF$  en  $DG$   
figuur II: niet mogelijk
- 







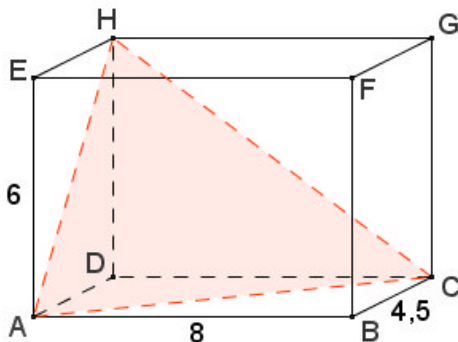
In de perspectieftekening liggen de middens van de ribben niet in het midden van de getekende ribben, bij de scheve projectie is dat wel het geval.

**Opgave 66:**

- nee, want in de perspectieftekening geldt:  $AD = 2$  en bij de scheve projectie geldt:  $AD = 3$
- de balk in scheve projectie heeft de grootste inhoud, nl:  $Inh = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$   
voor de perspectieftekening geldt:  $Inh = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

**Opgave 67:**

a.



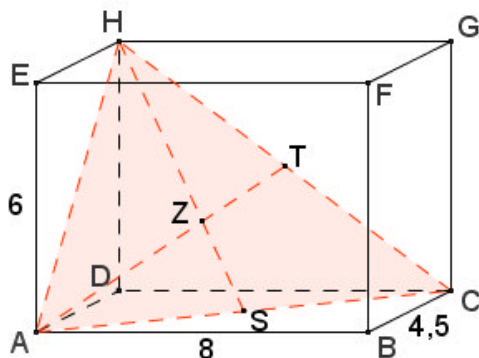
$$AC = \sqrt{8^2 + (4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{84\frac{1}{4}}$$

$$CH = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$AH = \sqrt{6^2 + (4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2}$$

b.  $CH$

c.



$\triangle CST \sim \triangle CAH$  (snavefiguur) dus  $AH : ST = AC : SC = 2 : 1$

figuur  $AHZST$  is een zandloperfiguur dus  $HZ : ZS = AH : TS = 2 : 1$

ja

d.  $ST : AH = 1 : 2$

**Opgave 68:**

Figuur 1:  $\tan \angle POA = \frac{1}{1} = 1$  dus  $\angle POA = 45^\circ$  dus de wijkhoek =  $45^\circ$

$$\text{verkorting} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

figuur II:  $\tan \angle AOH = \frac{2}{1} = 2$  dus  $\angle AOH = 63^\circ$

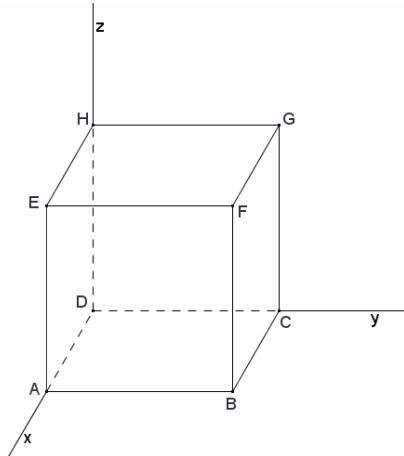
$$\text{wijkhoek} = 180^\circ - \angle AOH = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$$

$$\text{verkorting} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

figuur III:  $\tan \angle POA = \frac{1}{1} = 1$  dus  $\angle POA = 45^\circ$  dus de wijkhoek =  $45^\circ$

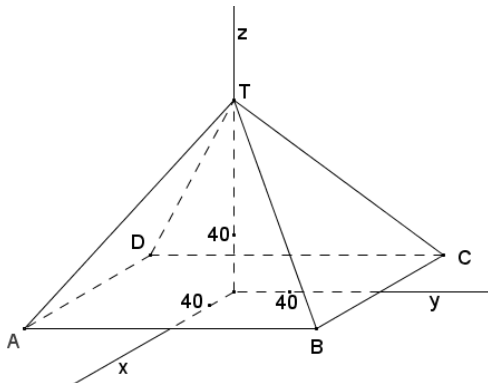
$$\text{verkorting} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

**Opgave 69:**

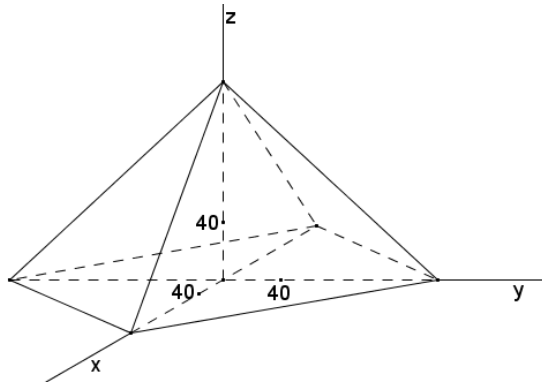


**Opgave 70:**

a.



b.



c. de wijkhoek is  $60^\circ$  en de verkorting is  $\frac{1}{2}$

**Opgave 71:**

a.  $AF$ ,  $MB$

b.  $AF = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$AD$  is in de tekening 3, dus in werkelijkheid:  $AD = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$

$$AH = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$AG = \sqrt{AH^2 + HG^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6,4$$

$$MB = \sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{18\frac{1}{4}} = 4,3$$

$$MH = \sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{18\frac{1}{4}} = 4,3$$

$$MC = \sqrt{MH^2 + HG^2} = \sqrt{\left(\sqrt{18\frac{1}{4}}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{34\frac{1}{4}} = 5,9$$

c.  $\angle BMF$

d.  $\tan \angle AMB = \frac{4}{1\frac{1}{2}}$

$$\angle AMB = 69,4^\circ$$

$$\angle BMF = 180^\circ - 2 \cdot \angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot 69,4 = 41^\circ$$

**Opgave 72:**

De wijkhoek is  $45^\circ$  en de verkorting is  $\frac{1}{2}$ .

**Opgave 73:**